Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wolters-Noordhoff

816
357
492

jaargang 68 1992 | 1993 mei

● Euclides ● ● ● ●

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax 076-65 32 18.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,00.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel

en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties

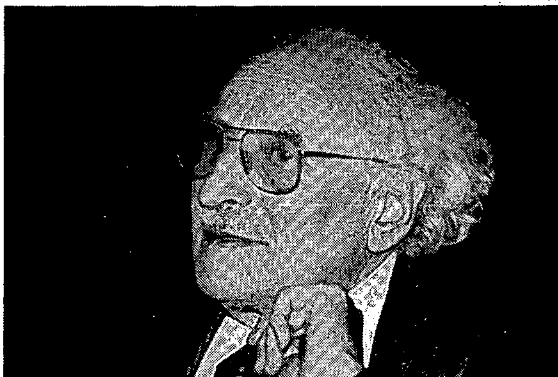
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ63,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ41,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ11,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Inhoud



H. Freudenthal

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ Redactiestatuut: eindelijk!

Redactie

Eindelijk is het zo ver. Er is een redactiestatuut opgesteld, waarin de positie en de taak van de redactie van Euclides geregeld worden. We schrijven hier 'eindelijk', omdat er heel wat tijd in gestoken is om een sluitende versie te krijgen. Vanaf deze plaats willen we graag bestuurslid Freek Mahieu dank zeggen voor het vele werk dat hij verzet heeft om het redactiestatuut vorm te geven. Dat is gedaan in samenspraak met de redactie; we hebben daarbij onder meer dankbaar gebruik gemaakt van een voorbeeld: het in 1991 verschenen redactiestatuut voor het NVON-blad.
Laat nu niemand denken, dat àlles voor altijd geregeld is. Er zal heus nog wel eens bijstelling nodig zijn. Maar de belangrijkste zaken zijn vastgelegd in het redactiestatuut zoals het er nu ligt.

Het meest democratisch zou zijn het gehele redactiestatuut in Euclides te publiceren. Vanwege het ruimtebeslag (8 bladzijden in Euclides) doen we dat niet. We volstaan met een globale opsomming van de inhoud van het redactiestatuut, waarbij enkele artikelen volledig worden geciteerd. Voor belangstellenden is het gehele redactiestatuut verkrijgbaar bij de ledenadministratie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, per adres de heer F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda. Voor leden van de NVvW is deze dienstverlening gratis.

Wie na lezing van het redactiestatuut behoefte heeft aan het geven van een reactie, suggesties ter verbetering, of ander commentaar, kan dit kenbaar maken aan de voorzitter van de redactie (Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht).

Waarom?

Tja, waarom zou er een redactiestatuut moeten zijn? Euclides bestaat al ruim 67 jaar, en al die tijd is er geen redactiestatuut geweest.
Misschien moeten we hopen, dat het redactiestatuut zelden gebruikt wordt. Het redactiestatuut is vooral van belang in geval van meningsverschillen. In zulke situaties biedt het redactiestatuut houvast. Verder is nu geregeld hoe nieuwe redactieleden worden benoemd, en hoe hun zittingsperiode – die 4 jaar bedraagt – al dan niet wordt verlengd.
Ook is omschreven hoe de inhoud van het blad wordt bepaald, en welke procedure gevolgd wordt om ingezonden kopij te beoordelen. Wat dit laatste betreft is het redactiestatuut voornamelijk een vastlegging van een reeds bestaande gang van zaken.

De inhoud van het redactiestatuut

Allereerst komt het artikel waarin de naam Euclides wordt vastgelegd. Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en wordt uitgegeven door Wolters-Noordhoff. Het laatste zal gaan veranderen – het eigendomsrecht komt bij de NVvW – en het redactiestatuut zal dienovereenkomstig moeten worden aangepast.

Artikel 2 citeren we volledig:
2. *Het doel van het blad is:*
a. het geven van informatie van de vereniging aan haar leden;
b. het bieden van een forum (discussieplatform) voor de leden;
c. het bieden van de mogelijkheid tot publiceren van artikelen op het gebied van het wiskunde-onderwijs, in de meest ruime zin genomen.

In artikel 3 wordt de inhoud van Euclides nader gespecificeerd.

De artikelen 4 t/m 22 gaan over taken, functies en werkwijze van de redactie. Redactieleden worden door het bestuur benoemd. In het geval van een vacature in de redactie wordt een oproep geplaatst in het blad.

De artikelen 23 t/m 34 gaan over het redactiebeleid. In deze artikelen staat op welke wijze kopij wordt beoordeeld en al dan niet geaccepteerd.

We citeren de artikelen 27, 28 en 29, die voor iedereen die kopij inzendt van toepassing zijn:
27. *Ieder ingekomen artikel wordt behalve door de hoofdredacteur door minstens één ander lid van de redactie beoordeeld op relevantie, inhoud en vormgeving. Na rapportage hierover neemt de hoofdredacteur een besluit, waarbij zich de volgende mogelijkheden kunnen voordoen:*
– *een artikel wordt zonder meer geplaatst;*
– *een artikel wordt bewerkt, gecorrigeerd, ingekort, in overleg met de auteur;*
– *een artikel wordt teruggezonden aan de auteur(s) met het verzoek het artikel te veranderen of te verbeteren; zo nodig krijgt de auteur daartoe aanwijzingen van de hoofdredacteur;*
– *een artikel wordt afgewezen met opgaaf van redenen.*
Als om redenen van actualiteit geen gelegenheid meer bestaat een artikel door een ander redactielid dan de hoofdredacteur te laten beoordelen, dan beslist de hoofdredacteur.
De hoofdredacteur doet in de redactievergadering verslag van zijn besluiten.
28. *Een artikel, weergevend een opvatting van een auteur of een reactie op een reeds eerder verschenen artikel, zal, na toepassing van artikel 27, in beginsel met voorrang worden geplaatst. In het geval van een reactie past de redactie in redelijkheid het beginsel van hoor en wederhoor toe.*
29. *De hoofdredacteur stelt zo nodig prioriteiten vast met betrekking tot plaatsing van artikelen. De redactie draagt zorg voor een evenwichtige verdeling van artikelen in ieder nummer, gerekend naar het belang van de artikelen en de aard van de artikelen, bijvoorbeeld didactisch, historisch, praktisch, theoretisch. In geval van een teveel aan (actuele) kopij kan de hoofdredacteur kopij schrappen of verwijzen naar een volgend nummer.*
In bijzondere gevallen kan in overleg met het bestuur en de uitgever tot een tijdelijke (eenmalige) uitbreiding van het aantal bladzijden worden besloten.

Het afleggen van verantwoording is geregeld in artikel 30 van het redactiestatuut:
30. *De redactie doet jaarlijks schriftelijk verslag van het gevoerde redactiebeleid en de uitvoering daarvan. Op de jaarvergadering van de vereniging is dit verslag beschikbaar.*

De behandeling van klachten wordt – in eerste aanleg – geregeld in artikel 31:
31. *Klachten aangaande inhoud en vormgeving van het blad worden behandeld door de redactievoorzitter. Deze wint advies in bij de hoofdredacteur en, indien wenselijk, bij de overige redactieleden.*
Dit is niet alles; in latere artikelen (39 en 40) wordt meer geregeld:
39. *Voor wat betreft het inbrengen van klachten door functionarissen of groeperingen binnen de vereniging geldt het gestelde in artikel 31.*
40. *Als een meningsverschil rond de uitvoering van het redactionele beleid niet door redelijk overleg kan worden opgelost, ligt de beslissing aangaande het meningsverschil bij het bestuur. Belanghebbenden kunnen tegen de beslissing van het bestuur in beroep gaan bij een commissie van beroep. De uitspraak van deze commissie inzake het meningsverschil is bindend.*
De commissie bestaat uit drie leden. Het bestuur en de redactie dragen direct na het in werking treden van dit statuut in gezamenlijk overleg zorg voor de samenstelling van de commissie en zorgen verder voor eventuele wijziging of aanvulling.

Vanaf artikel 35 worden de financiën, de relatie met het bestuur en de relatie met de uitgever geregeld.

Artikel 43 zegt dat het redactiestatuut in werking treedt zodra het bestuur en de redactie ermee instemmen. Deze instemming is er inmiddels (laatstelijk verkregen van de redactie, op haar vergadering op 23 januari 1993).
En dus geldt het redactiestatuut.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ De kruisende ladders in de steeg

W. H. V. de Goede

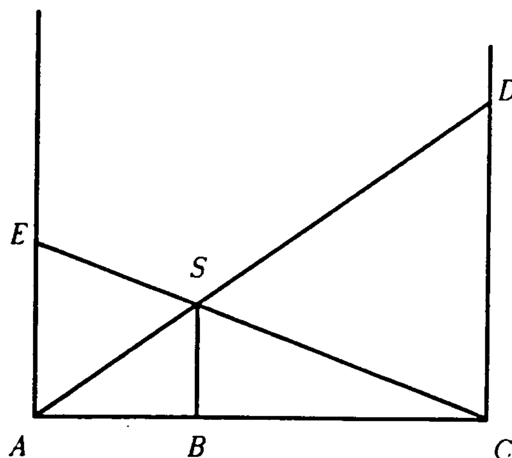
Inleiding

Elke wiskundeleraar wordt van tijd tot tijd door zijn leerlingen geconfronteerd met de een of andere puzzel van wiskundige aard. Deze puzzels zijn duidelijk uit een eindige verzameling afkomstig, want vaak zijn het dezelfde. Gewoonlijk stel ik mij wat afzijdig op van deze vorm van extra werk, maar als er bij wordt gezegd dat ook vaders en ooms er zich al vruchteloos de hersens op hebben gebroken ga ik stiekem toch wel eens op de uitdaging in. Zo ook met de ladderproblemen. In **Euclides no 4 van december '90** schreef onze puzzelredacteur Jan de Geus in de rubriek **Recreatie** over ladderproblemen (Opgave 623). Nu had ik het daar geformuleerde probleem net enige maanden tevoren voor een leerling opgelost en netjes opgeschreven, zodat ik dat zo kon insturen. Echter, in zijn inleiding schreef De Geus:

'*Van de problemen die je in de puzzelliteratuur steeds weer tegenkomt is het probleem van de kruisende ladders in de steeg het meest geliefd. Ook als puzzelredacteur is mij al een aantal keren door Euclideslezers dit probleem voorgelegd. Het aardige van dit probleem is waarschijnlijk dat het simpel oogt, maar in het algemeen een vierdegraadsvergelijking oplevert, die slechts benaderde oplossingen toelaat.*'

Dat klopt, dacht ik, toen ik het las, want ook ik was dit probleem al eens tegengekomen. Bij deze constatering zou het waarschijnlijk zijn gebleven, ware het niet dat het A-team van onze school van de Wiskunde A-lympiade terug kwam met juist dit probleem. Kennelijk hebben de finalisten elkaar in hun vrije tijd onderhouden met wiskundeproblemen! Misschien was dit onder normale omstandigheden toch nog onvoldoende geweest om aan het werk te gaan, maar ik kreeg het probeem weer voorgelegd in de examentijd, met de vele surveillance-uren waarin men wordt verondersteld slechts papier uit te delen en kandidaten naar het toilet te begeleiden en die men verder in volstrekte ledigheid moet doorbrengen. Vandaar!

Een speciaal geval



De ladders AD en CE zijn respectievelijk 7 meter en $6\frac{1}{2}$ meter lang en kruiselings in een steeg geplaatst. Hun kruispunt S bevindt zich 1 meter boven de grond.

De vraag is nu: Hoe breed is de steeg?

Het probleem laat zich als volgt exact oplossen: Stel de breedte van de steeg $AC = x$.
Wegens gelijkvormigheid:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CD} \text{ en } \frac{CB}{BS} = \frac{CA}{AE}$$

Omdat $BS = 1$, $AC = x$, $CD = \sqrt{49 - x^2}$ en $AE = \sqrt{42\frac{1}{4} - x^2}$ geldt nu

$$AB = \frac{x}{\sqrt{49 - x^2}} \text{ en } BC = \frac{x}{\sqrt{42\frac{1}{4} - x^2}}$$

en wegens $AB + BC = AC$ vinden we

$$\frac{x}{\sqrt{49 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{42\frac{1}{4} - x^2}} = x$$

zodat

$$\frac{1}{\sqrt{49 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{42\frac{1}{4} - x^2}} = 1$$

en dus

$$\sqrt{49 - x^2} + \sqrt{42\frac{1}{4} - x^2} = \sqrt{(49 - x^2)(42\frac{1}{4} - x^2)}$$

De volgende list leidt nu tot een 'hanteerbare' vierdegraadsvergelijking: We lezen de vergelijking als $x_1 + x_2 = x_1x_2$ en roepen de worteleigenschappen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ (die vroeger in de derde klas zo'n belangrijke rol speelden) in ons geheugen terug, we zien dan dat x_1 en x_2 op te vatten zijn als oplossingen van de vergelijking $t^2 - pt + p = 0$, zodat we kunnen schrijven:

$$\sqrt{49 - x^2} = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4p} \text{ en}$$

$$\sqrt{42\tfrac{1}{4} - x^2} = \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4p} \text{ met } p > 4$$

Als p bekend is dan is x bekend, immers, kwadrateren en optellen geeft:

$$x = \sqrt{45\tfrac{5}{8} - \tfrac{1}{2}p^2 + p}$$

Kwadrateren en aftrekken geeft:

$$6\tfrac{3}{4} = p\sqrt{p^2 - 4p}$$

en dus (nogmaals kwadrateren):

$$p^4 - 4p^3 - 45\tfrac{9}{16} = 0$$

met $q = 2p$ wordt dit:

$$q^4 - 8q^3 - 729 = 0$$

Nu zal duidelijk zijn waarom dit een speciaal geval betreft, want van deze vierdegraadsvergelijking kunnen we de oplossing $q = 9$ zomaar 'zien'! (Enig functieonderzoek leert dat de enige andere reële oplossing in de buurt van -4 ligt en dus niet interessant is). We vinden in dit geval voor de breedte van de steeg: $AC = x = 2\sqrt{10}$

Het algemene geval

In het algemene geval veronderstellen we ladderlengtes l_1 en l_2. Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we aannemen dat $l_1 > l_2$ (het geval $l_1 = l_2$ is triviaal) en dat nog steeds $BS = 1$, immers het geval $BS = h$ kan hiertoe worden herleid door alle afmetingen te delen door h en later terug te transformeren. We krijgen op dezelfde manier

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2) - \tfrac{1}{2}p^2 + p}$$

waarbij $p > 4$ een oplossing is van de vergelijking

$$p^4 - 4p^3 - (l_1^2 - l_2^2)^2 = 0$$

We lossen deze vergelijking op met de methode van **Ferrari (1522-1565):**
Schrijf voor het gemak $p^4 - 4p^3 - a^2 = 0$
Nu moet eerst de derdemachtsterm weggewerkt worden, daartoe substitueren we $p = y + 1$, dit geeft

$$y^4 - 6y^2 - 8y - (a^2 + 3) = 0$$

Deze vergelijking moet nu volgens Ferrari worden geschreven in de vorm:

$$(y^2 + q)^2 - (ry + s)^2 = 0$$

Door ontbinden krijgen we dan twee vierkantsvergelijkingen en daarmee de oplossingen

$$y = -\tfrac{1}{2}r \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4q - 4s} \quad \vee$$

$$y = \tfrac{1}{2}r \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4q + 4s}$$

Daarbij moeten r, s en q wordenbepaald uit het stelsel

$$\begin{cases} 2q - r^2 = -6 \\ rs = 4 \\ q^2 - s^2 = -(a^2 + 3) \end{cases}$$

Eerst even wat herschrijven: de eerste vergelijking van het stelsel levert $r^2 - 4q = 12 - r^2$ en de tweede: $s = \dfrac{4}{r}$. Nu was $p = y + 1$, dus we vinden:

$$p = 1 - \tfrac{1}{2}r \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{12 - r^2 - \frac{16}{r}} \quad \vee$$

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}r \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{12 - r^2 + \frac{16}{r}}$$

Voor de vorm onder het wortelteken van de eerste oplossing geldt:

$$12 - r^2 - \frac{16}{r} = -\frac{r+4}{r}(r-2)^2$$

Voor $r \in \mathbb{R}$ met $-4 < r < 0$ hebben we hier dus twee reële oplossingen. De andere twee oplossingen ontstaan uit de eerste door r te vervangen door $-r$, dus deze zijn reëel voor $0 < r < 4$. We kiezen voor $0 < r \leq 4$ en daarmee zijn de eerste twee oplossingen niet reëel zodat deze dus buiten beschouwing kunnen blijven. Dan is er nog de voorwaarde $p > 4$ en daarmee vervalt de oplossing

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2}\sqrt{12 - r^2 + \frac{16}{r}} =$$

$$1 + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2}(r+2)\sqrt{\frac{4-r}{r}}$$

want met een functieonderzoek zien we dat p hier een stijgende functie van r is, met maximum $p = 3$ voor $r = 4$. Dus we vinden:

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}\sqrt{12 - r^2 + \frac{16}{r}} =$$

$$1 + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}(r+2)\sqrt{\frac{4-r}{r}}$$

Voorts is: $-\tfrac{1}{2}p^2 + p = -\tfrac{1}{2}p(p-2) =$
$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\left(r + (r+2)\sqrt{\frac{4-r}{r}}\right)^2$, zodat tenslotte

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\left(r + (r+2)\sqrt{\frac{4-r}{r}}\right)^2}$$

Nu moet er een oplossing r met $0 < r < 4$ gevonden worden uit het stelsel

$$\begin{cases} 2q - r^2 = -6 \\ rs = 4 \\ q^2 - s^2 = -(l_1^2 - l_2^2)^2 - 3 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $q^2 = \tfrac{1}{4}r^4 - 3r^2 + 9$ en uit de tweede $s = \dfrac{4}{r}$, in de derde gesubstitueerd wordt dat

$\tfrac{1}{4}r^4 - 3r^2 + 9 - \dfrac{16}{r^2} + (l_1^2 - l_2^2)^2 + 3 = 0$, zodat

$$r^6 - 12r^4 + (48 + 4(l_1^2 - l_2^2)^2)r^2 - 64 = 0$$

Met $r^2 = \rho$ en weer $(l_1^2 - l_2^2)^2 = a^2$ voor een iets aantrekkelijker uiterlijk, komt er

$$\rho^3 - 12\rho^2 + (48 + 4a^2)\rho - 64 = 0$$

Deze derdegraadsvergelijking lossen we op volgens **Cardano (1501-1576)**, leermeester van de reeds genoemde Ferrari: Substitueer $\rho = \xi + 4$ (om de tweedemachtsterm kwijt te raken!) en vind:

$$\xi^3 + 4a^2\xi + 16a^2 = 0$$

Of, in weer een iets vriendelijker gedaante

$$\xi^3 + b\xi + 4b = 0$$

Deze vergelijking heeft slechts één reële oplossing,

immers $\frac{d}{d\xi}(\xi^3 + b\xi + 4b) = 3\xi^2 + b$ en wegens $b = 4a^2 = 4(l_1^2 - l_2^2)^2 \wedge l_2 > l_1$ is $b > 0$ en daarmee de afgeleide van de functie $f(\xi) = \xi^3 + b\xi + 4b$ positief. Aangezien voorts $f(-4) = -64$ en $f(0) = 4b$, zodat $f(0) > 0$, moet deze oplossing tussen -4 en 0 in liggen. Omdat $\rho = \xi + 4$ geldt $0 < \rho < 4$, zodat wanneer we $r = +\sqrt{\rho}$ nemen, meteen aan de voorwaarde $0 < r < 4$ is voldaan.
Cardano volgend substitueren we nu $\xi = y + z$:

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + by + bz + 4b = 0$$

Deze vergelijking laat zich schrijven als
$y^3 + z^3 + 4b + (3yz + b)(y + z) = 0$ en aangezien $y + z \neq 0$, levert een oplossing van het stelsel $y^3 + z^3 = -4b \wedge 3yz = -b$ ons een oplossing voor ξ.
Ook: $y^3 + z^3 = -4b \wedge y^3z^3 = -\frac{b^3}{27}$ en via de worteleigenschappen van de vierkantsvergelijking zijn y^3 en z^3 nu weer op te vatten als de oplossingen van

$$t^2 + 4bt - \frac{b^3}{27} = 0$$

Dus bijvoorbeeld $y^3 = -2b + \frac{1}{2}\sqrt{16b^2 + \frac{4b^3}{27}}$ en

$$z^3 = -2b - \frac{1}{2}\sqrt{16b^2 + \frac{4b^3}{27}}.$$

Omdat $b = 4(l_1^2 - l_2^2)^2 \wedge l_1 > l_2$ is de vorm onder het wortelteken positief, zodat y^3 en z^3 beide reëel zijn en hiermee hebben we dus een reële oplossing voor y en z en dus ook voor achtereenvolgens ξ, ρ en r gevonden en daarmee is x bekend.

We vinden na terugrekenen:

$$r = \left(4 - 2\sqrt[3]{(l_1^2 - l_2^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2\sqrt{1 + \tfrac{1}{27}(l_1^2 - l_2^2)^2}} - 2\sqrt[3]{(l_1^2 - l_2^2)^2 + (l_1^2 - l_2^2)^2\sqrt{1 + \tfrac{1}{27}(l_1^2 - l_2^2)^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

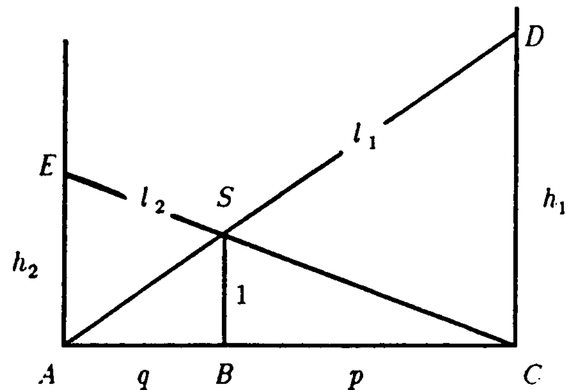
We hebben al gezien dat deze oplossing voldoet aan $0 < r < 4$, en met

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\left(r + (r + 2)\sqrt{\frac{4 - r}{r}}\right)^2}$$

is de breedte van de steeg nu exact bekend.
Als men de uitdrukking voor r in die voor x substitueert is x direct als functie van l_1 en l_2 geschreven, zij het in radicalen die er niet erg aantrekkelijk uitzien, maar al mijn pogingen om deze uitdrukking te fatsoeneren tot een eenvoudiger waren tot nu toe vruchteloos.

Variaties

In mijn eigen, overigens minieme, puzzelbibliotheek kwam ik het ladderprobleem slechts eenmaal tegen (in het Prisma-boekje 'Wiskunde voor je plezier' van Oswald Jacoby en William H. Benson) en dan nog in de volgende variant: Bepaal een constellatie waarbij l_1, l_2 en x rationaal zijn. De oplossing hiervan is niet moeilijk en laat zich als volgt generaliseren:



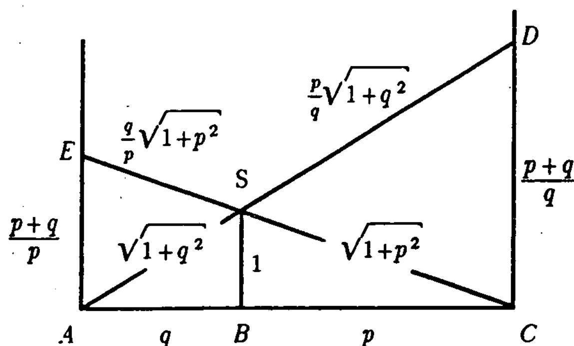
Stel $l_1, l_2, x \in \mathbb{Q}^+$. Nu is wegens gelijkvormigheid: $\frac{q}{1} = \frac{x}{h_1} \Leftrightarrow h_1 = \frac{x}{q}$ en evenzo $h_2 = \frac{x}{p}$, dus

$l_1 = \sqrt{x^2 + h_1^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{q^2}} = x\sqrt{1 + \frac{1}{q^2}}$ en evenzo $l_2 = x\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}$. Kennelijk geldt dus dat $\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}$ en $\sqrt{1 + \frac{1}{q^2}}$ nu rationaal zijn. Stel $1 + \frac{1}{q^2} = a^2$ en $1 + \frac{1}{p^2} = b^2$ met $a, b \in \mathbb{Q}^+$.
Ook: $p^2 = \frac{1}{b^2 - 1}$ en $q^2 = \frac{1}{a^2 - 1}$ en omdat

$q = x - p$ en dus $p^2 - 2px + x^2 = q^2$ vinden we uit deze beide betrekkingen $\frac{1}{b^2-1} - 2px + x^2 =$

$= \frac{1}{a^2-1}$ zodat $p = \frac{x^2(a^2-1)(b^2-1) + a^2 - b^2}{2x(a^2-1)(b^2-1)}$

Omdat $x, a, b \in \mathbb{Q}^+$ zien we met deze laatste betrekking dat $p \in \mathbb{Q}^+$. Met andere woorden: als l_1, l_2 en x rationaal zijn, zijn ook p en q rationaal en wegens de gelijkvormigheid de overige lijnstukjes in de figuur dus ook.
Nu is er bij elke driehoek met rationale zijden een driehoek met gehele zijden te vinden die ermee gelijkvormig is en andersom uiteraard ook. We kunnen de algemene oplossing voor het genoemde rationale probleem als volgt construeren: Ga uit van twee Pythagoreïsche drietallen: $a^2 + b^2 = c^2$ en $d^2 + e^2 = f^2$, normeer één van de termen in het linkerlid van beide betrekkingen door bijvoorbeeld te delen door a^2 respectievelijk d^2 en vul aan, dit geeft met $p = \frac{b}{a}$ en $q = \frac{e}{d}$ het volgende resultaat:

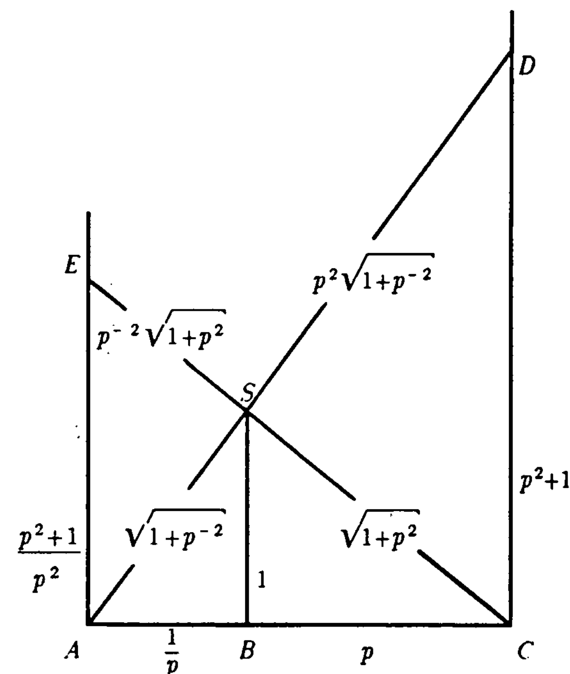


Bijvoorbeeld met $3^2 + 4^2 = 5^2$ en $5^2 + 12^2 = 13^2$ kunnen we $q = \frac{4}{3}$ en $p = \frac{12}{5}$ nemen.

We vinden dan $l_1 = 4\frac{2}{3}$, $l_2 = 4\frac{2}{45}$ en $x = 3\frac{11}{15}$

Proberen we nu $AC = x$ uit te drukken in $AD = l_1$ en $CE = l_2$, dan krijgen we het algemene probleem terug. Geen wonder, want het rationaal zijn van de getallen wordt nergens gebruikt.

Wel aardig is het volgende resultaat: Neem voor beide driehoekjes hetzelfde drietal in de asymmetrische situatie, dan is dus $AD \perp CE$ en de oplossing wordt (wegens $q = \frac{1}{p}$):



In dit geval geldt

$$l_1 l_2 = (1 + p^2)\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\sqrt{1 + p^2} =$$

$$\left(p^2 + 2 + \frac{1}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(p + \frac{1}{p}\right)^3, \text{ zodat } x = \sqrt[3]{l_1 l_2}$$

Bijvoorbeeld $3^2 + 4^2 = 5^2$ geeft $p = \frac{4}{3}$, dus $l_1 = \frac{125}{36}$, $l_2 = \frac{125}{48}$ en $x = \frac{25}{12}$

Natuurlijk is het nu ook interessant om even te kijken wat de extra voorwaarde $AD \perp CE$ voor het algemene geval betekent. We krijgen dan wegens $\triangle ABS \sim \triangle SBC$ dat $BS^2 = AB \cdot BC$, dus dat

$$\frac{x}{\sqrt{l_1^2 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{l_2^2 - x^2}} = 1$$

Dit geeft als antwoord: $x = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$

Combineren we dit met $x = \sqrt[3]{l_1 l_2}$ dan vinden we nog als mogelijke betrekking: $x = \sqrt[4]{l_1^2 + l_2^2}$.

Kennelijk geldt dat de functies

$(x,y) \rightarrow \sqrt[3]{xy}$, $\quad (x,y) \rightarrow \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en

$(x,y) \rightarrow \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ identiek zijn op de kromme

$x = (1 + p^2)\sqrt{1 + \dfrac{1}{p^2}} \wedge y = \left(1 + \dfrac{1}{p^2}\right)\sqrt{1 + p^2}$ en

voor rationale p het rationale beeld $p + \dfrac{1}{p}$ geven.

Tenslotte

Het was mijn bedoeling om, als zou zijn gebleken dat de afzichtelijke vormen van de algemene oplossing tot een fraaie eenvoudige formule leiden, op zoek te gaan naar een elegante meetkundige oplossing van het probleem. Dit is niet gelukt en hier ligt dus nog een uitdaging. Wel was het interessant om de exacte oplossing van derde- en vierdegraadsvergelijkingen eens te bestuderen. Zoals waarschijnlijk zeer veel wiskundigen kende ik tot nu alleen maar het bestaan ervan en ik moest ze dan ook opzoeken. Een en ander was evenwel snel gevonden in:
SESAM, Atlas van de wiskunde, deel 1.

Boekbespreking

K. van Harn en P. J. Holewijn: *Markov-ketens in diskrete tijd*; Epsilon Uitgaven, Utrecht 1991, ISBN 90-5041-026-X, 244 blz. Hfl. 34,50.

Dit is een goed geschreven boek dat op een heldere wijze een belangrijk onderwerp uit de kansrekening uiteenzet voor leek en specialist.

Een Markov-keten is een speciaal soort rijtje van stochastische variabelen $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, ..., $X(n)$, ... etc.

Zo'n rijtje heet een Markov-keten als het op elk tijdstip n de eigenschap heeft, dat onder de voorwaarde dat het heden $X(n)$ bekend is, de kansverdeling van de toekomst $X(n + 1)$, $X(n + 2)$, ... alleen maar afhangt van het heden $X(n)$ en niet van het verleden $X(0)$, ..., $X(n - 1)$.

Een eenvoudig voorbeeld hiervan is de hoeveelheid geld die een gokker heeft gedurende het spelen. Als we weten wat zijn kapitaal is voor de aanvang van het n-de spel, is het voor de berekening van de kansverdeling van zijn kapitaal na dit n-de spel niet meer relevant hoeveel geld hij had voor het $(n - 1)$-ste spel.
Omdat als voorkennis eigenlijk niet meer nodig is dan de wiskunde van 6 vwo, is dit boek uitstekend geschikt voor zelfstudie door studenten aan universiteit en hbo en voor onderzoekers in de academische wereld en het bedrijfsleven. Men kan dit boek ook gebruiken als leidraad bij een college Markov-ketens.
Het boek is voortgekomen uit colleges en oefeningen aan de V.U. te Amsterdam, waar de beide auteurs werken aan de faculteit wiskunde en informatica.
De grondbegrippen uit de kansrekening en enkele analytische hulpmiddelen worden voor de niet-ingewijde in het eerste hoofdstuk uit de doeken gedaan.
Als kanstheoretische voorbereiding op het eigenlijke onderwerp worden in hoofdstuk II stochastische tijden en aantallen en genererende functies ingevoerd.
Hoofdstuk III gaat over de vrije Bernoulli-wandeling (random walk op de gehele getallen), die later veelvuldig wordt gebruikt als voorbeeld van een Markov-keten.
In hoofdstuk IV worden Markov-ketens ingevoerd, hun basiseigenschappen worden afgeleid, hun toestanden worden geclassificeerd en de intree- en absorptiekansen worden berekend. In het geval van de gokker is dit bijvoorbeeld de kans dat hij eens blut raakt gegeven dat hij met K guldens is begonnen.
Verder wordt het geval behandeld dat de stochastische variabelen slechts eindig veel waarden kunnen aannemen.
Het vijfde hoofdstuk gaat over de limiet van de kansverdeling van $X(n)$ voor n naar oneindig en over invariante kansmaten.

In deze eerste 5 hoofdstukken is de algemene theorie van Markov-ketens behandeld. De rest van het boek (dat is 3/8 deel), is gewijd aan hoofdstuk VI dat uit 4 delen bestaat; het wachtrijprobleem, vertakkingsprocessen, vernieuwingsprocessen en geboorte-sterfteprocessen. Deze 4 voorbeelden blijken belangrijke toepassingen te zijn van de Markov-theorie, die door haar algemene opzet een zeer breed gebied blijkt te beslaan. Ook in de natuurkunde, biologie, econometrie loopt men tegen Markov-ketens aan.

Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een groot aantal opgaven. Doordat achterin in het boek aanwijzingen en antwoorden staan, is het boek zeer geschikt voor zelfstudie en natuurlijk ook als leidraad bij colleges.

Van Harn en Holewijn hebben een zeer instructief en helder boek geschreven dat ik graag wil aanbevelen aan iedereen die zich wil inwerken in de theorie van Markov-ketens.

Vincent de Valk

● Serie ● ● ● ● ●

'Begrijpen'

▶ Begrijpen als resultaat van leren Leren door welbewust verwondering op te roepen

Harrie Broekman

De in de titel genoemde verwondering vraagt een actieve rol van de lerende. Deze kan zijn oorsprong vinden in ervaringen, in een gesprek, in het lezen van een tekst, maar kan ook ontstaan door interne reflectie. In alle gevallen is er echter een gerichtheid van de lerende nodig en spelen emoties een belangrijke rol.
Het belang van het rekening houden met de emotionele kant van het leren wordt bevestigd door resultaten van ontwikkelingspsychologisch onderzoek. Veel onderzoekingen wijzen immers in de richting van een omslag in de pubertijd van het willen 'leren' in enge zin (verwerven van objectieve kennis) naar het subjectieve.
Er wordt getwijfeld aan de zuiverheid van de intenties van de volwassenen. Ook dat wijst er op dat de motivatie tot leren sterk beïnvloed wordt door wat de lerende emotioneel bezig houdt. Dat is natuurlijk niet nieuw. Het is toch één van de redenen waarom we meer context-rijke, realistische reken/wiskunde op school krijgen?! Bij Martin Goedhart vond ik een treffend citaat van Koning:
Te weinig nog wordt bij het M.O., ook bij het onderwijs in de wiskunde en de N.W., rekening gehouden met de aanwezige ervaring en de belangstelling van de leerlingen. Men bekommert er zich dikwijls niet om of een probleem bij de leerling leeft, of de situaties, die men behandelt, voor hem enige realiteit bezitten, of dus nieuwe ervaringen, die men de leerling wil laten opdoen, aansluiten bij de reeds aanwezige ervaring. Op deze wijze wordt een verkeerde emotionele basis gelegd, waardoor de toegang tot een gebied voor de leerling dikwijls wordt versperd. Het 'geleerde' blijft een vreemd gebied, waarmee zijn leven geen contact heeft en waarover hij slechts kan nápraten, wat hem is vóórgehouden. Zo komt hij dan tot schijnexacte antwoorden, waarin eigen denken tot nul is gereduceerd. De weg naar zelfstandigheid is dan geblokkeerd'.
Koning geeft in dit citaat de noodzaak aan om aan te sluiten bij de aanwezige ervaring en belangstelling van leerlingen. Gebeurt dat niet dan zal dat leiden tot – wat hij noemt – napraatkennis. Koning kwam vanuit een pedagogische doelstelling – namelijk de opvoeding van het kind tot zelfstandigheid – tot zijn pleidooi voor het leren op basis van eigen ervaringen.
Ik bepleit leren op basis van eigen ervaringen omdat ik 'begrijpen' nastreef als resultaat.
In de praktijk van alledag is meer nodig dan de ervaringen-sec.

3e klas havo/vwo.
Bij het bespreken van het mogelijke aantal nulpunten van f_p: $x \to x^2 + px + 1$ besluit de leraar elke leerling een waarde van p te geven en voor die waarde van de grafiek van f_p te laten tekenen.
Nadat de leerlingen dit met enig gesputter gedaan hebben probeert de leraar een gesprek over het aantal nulpunten te voeren. De rol van p dient daarbij – uiteraard – begrepen te worden.
De leerlingen lijken niet verrast door het door ieder van hen gevonden aantal nulpunten. Het lukt de leraar ook niet ze verder te laten kijken dan hun eigen blaadje en dat van hun directe buur. Een 'uitstijgen' boven hun eigen beperkte ervaring vindt niet plaats. Er was geen *verwondering* die kon dienen als aanzet tot leren, als energiebron.
Hierdoor kwamen ook andere energiebronnen niet vrij om ervoor te zorgen dat het (denk)werk op

gang kon komen én gehouden kon worden. Die andere bronnen van energie kunnen bijvoorbeeld zijn:
- het plezier om koppelingen te maken
- een schijnbaar complexe situatie vereenvoudigen
- een algemeen patroon zien in iets dat eerst 'verbrokkeld' was
- het plezier beleven aan concreet bezig zijn
- praten met anderen over het begrepene

Die energie, die vrijkomt bij het lesgeven door verwondering op te roepen is juist bij wiskunde eigenlijk zo voor de hand liggend. Want achter ieder wiskundig feit of stelling verbergt zich een 'verwondering', anders zou het toch niet de moeite waard zijn het te vermelden?

Bij ieder onderwerp in de schoolwiskunde zijn de mogelijkheden aanwezig om verwondering, verrassing op te roepen. In de praktijk van alledag zal dit vaak gebeuren door schijnbaar kleine dingen, waar we attent op moeten zijn, willen we ze als leraar benutten.
Vaak zit het in het opmerken van verwondering en er spontaan op reageren, maar we hebben ook de mogelijkheid om de verrassing op te roepen door opdrachten uit het boek te 'benutten'.
Een prachtig voorbeeld hiervan is het volgende gesprekje in een 3 MAVO klas rond een opgave uit Moderne Wiskunde 3hm pagina 125.

5 Uit hoeveel getallenparen bestaat de oplossingsverzameling van de volgende stelsels? Onderzoek dit door de grafieken van de vergelijkingen te tekenen.

a $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ 3y + x = 8 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 4x - 3y = 12 \end{cases}$

6 Hiernaast zijn getekend de cirkel $c: x^2 + y^2 = 10$ en de lijnen $l: x = -1$ en $m: y = 2$

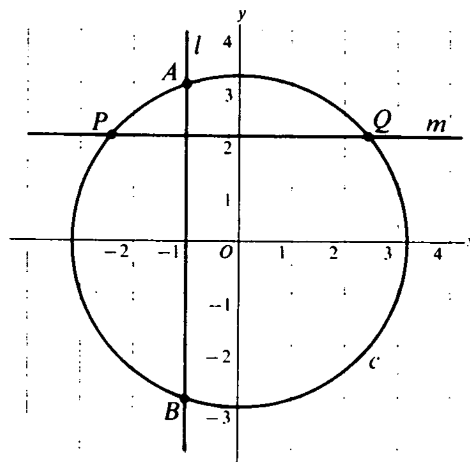
a Lees de coördinaten af van de punten A en B.

b Schrijf de oplossingsverzameling op van het stelsel: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = -1 \end{cases}$

c Eén van de coördinaten van punt P is bekend. Welke is dat? Hoe weet je dat?

d Bereken de coördinaten van P en Q.

e Schrijf de oplossingsverzameling op het stelsel: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 2 \end{cases}$



De leraar heeft de figuur onbewust wat slordig op het bord getekend en schrijft er bij $P(-3, 2)$.
Meerdere leerlingen: *−3 klopt niet. U heeft hem getekend door die punten, maar dat klopt niet.*
Yolanda: *het moet 2½ zijn.*
Hans/Youssef: *nee, dat klopt ook niet.*
Leraar: *maar, we weten in elk geval wel dat de y-coördinaat van P gelijk aan 2 is.*
Meerdere leerlingen: *ja, maar die andere coördinaat kun je ook in het boek niet goed aflezen. Hoe moet dat dan? Bij die andere sommen kon het wel zo!*
Yolanda: *maar waarom kan dat hier dan niet?*

Deze verwondering van Yolanda deed veel leerlingen zich realiseren dat er soms meer nodig is dan een nauwkeurige grafiek. Er was hierdoor een startpunt voor het gaan leren van een andere oplossingsmethode. Het is echter niet meer dan een startpunt, *maar ook niet minder.*

Aanbevolen literatuur

Robert B. Davies: Understanding 'Understanding', *Journal of Mathematical Behavior 11*, 225-241 (1992).
Martin Goedhart: *Meten: Normen en Waarden.* Proefschrift, Utrecht 1990.
Bram Lagerwerf: Werken met concrete materialen, het wiskundewerklokaal. *Euclides 68*, november 1992.
John Mason: Slogans. *Mathematics Teaching 139*, June 1992.

• Boekbeschouwing •

▶ Freudenthals laatste boek

Bert Zwaneveld

Inleiding

Deze uitgebreide boekbespreking bestaat uit drie delen:
– deze **inleiding**, waarin iets over de achtergrond van het te bespreken boek,
– de **inhoud** en de hoofdthema's die Freudenthal naar voren heeft willen brengen,
– en ten slotte mijn persoonlijke indruk onder het kopje **'waardering'**.

Freudenthal schrijft zelf, dat dit boek niets toevoegt aan wat hij eerder al gepubliceerd heeft: het geeft geen nieuwe ervaringen, aspecten of ideeën. Wat hij wel bedoeld heeft, is al dat 'oude' te presenteren in onderlinge samenhang. Ook wil hij eventueel een aangepaste argumentatie geven. De directe aanleiding voor het schrijven van het boek was een bezoek aan China. In een aantal colleges, werkgroepen en discussies heeft hij daar geprobeerd zijn mening over het wiskundeonderwijs te presenteren.

Op het moment dat Freudenthal dit boek schreef was natuurlijk nog niet bekend dat het zijn laatste werk zou worden. Met de postume verschijning van dit boek heeft hij onbedoeld een monument voor zich zelf opgericht.

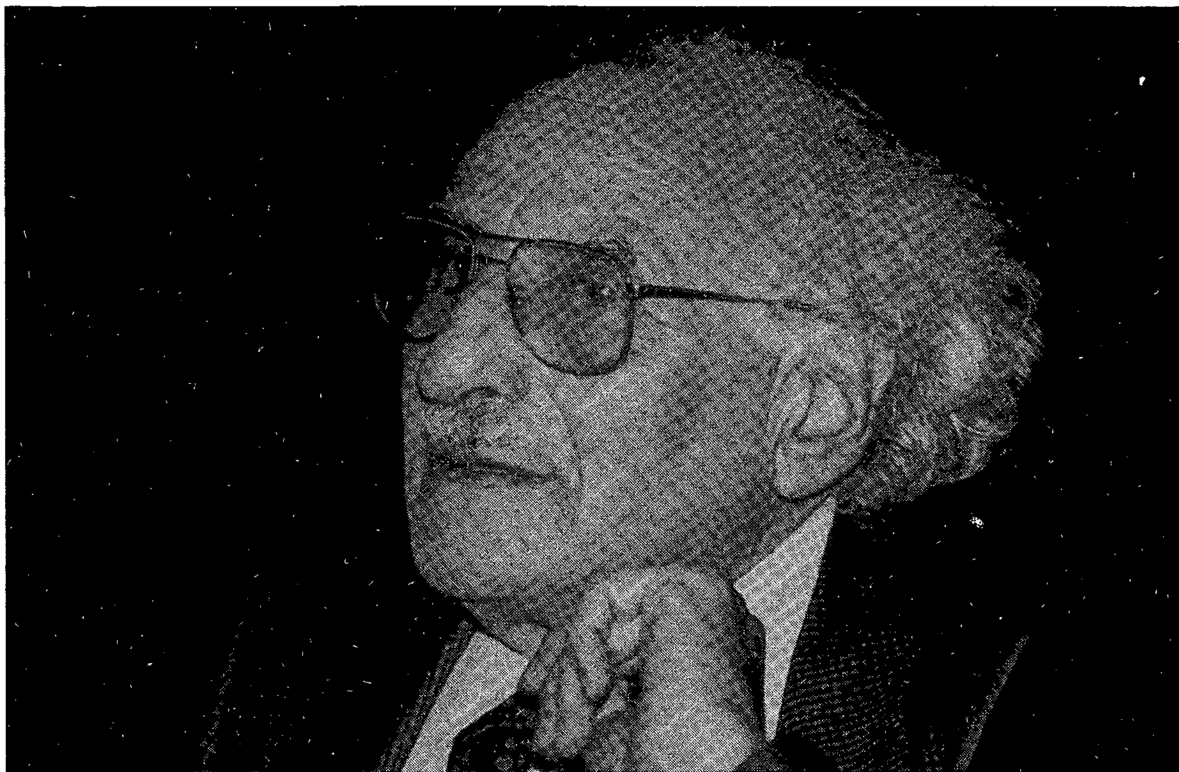
Inhoud

Het boek bestaat uit drie hoofdstukken die elk uit drie of vier grotere gehelen van zo'n 20 bladzijden bestaan.
De hoofdstukken zijn:
1 **Wiskunde fenomenologisch**
2 **Didactische principes**
3 **Het landschap van het wiskundeonderwijs**

Het zal de lezer duidelijk zijn dat het onmogelijk is hier in te gaan op alles wat dit monumentale werk biedt. Ik zal me beperken tot datgeen waarvan ik denk dat het de essentie is.

Wat is wiskunde? In het eerste hoofdstuk probeert Freudenthal duidelijk te maken waar het volgens hem bij wiskunde[1] om gaat. In eerste instantie gaat het in de wiskunde om het structureren van verschijnselen van het dagelijks leven met bewust inschakelen van het gezond verstand. Tellen met als vervolg rekenen en daar weer achteraan algebra, of opsporen van de gelijkenis in de vormen van voorwerpen en daarna gelijkvormigheidsmeetkunde. Vervolgens zijn er telkens nieuwe wiskundige structuren. In wat hiervoor staat zitten twee elementen:
– wiskunde moet je gebruiken, dus activiteiten zijn van belang,
– wiskunde is nauw verbonden met de werkelijkheid. In de wiskunde gaat het om het abstraheren, uitgaande van de feitelijke objecten. Zo ontstaan mentale objecten.

Freudenthal gaat uitvoerig in op het **mathematiseren**, wat hij verbindt met te onderscheiden activiteiten als axiomatiseren, formaliseren, schematiseren en modelleren.
Axiomatiseren is de laatste stap bij het ontwikkelen van een bepaald deel van de wiskunde, daar waar het gaat om de vastlegging. De aandacht gaat daarbij eerder uit naar de vorm dan naar de inhoud. Axioma's komen voort uit zogeheten paradigma's, dat zijn heel sprekende voorbeelden, die veel andere, overeenkomstige voorbeelden representeren.
Formaliseren is het verbeteren van de taal door middel van effectieve symbolen.
Schematiseren is het proces waarbij ervaringen en



H. Freudenthal

activiteiten worden gegeneraliseerd tot wetten en regels. Dit geschiedt op paradigmatische wijze.
Modelleren is het vereenvoudigen of idealiseren van een complexe situatie ten einde deze toegankelijk te maken voor een wiskundige behandeling.

Na deze definities gaat Freudenthal verder in op mathematiseren. Dat is zijns inziens:
Ten eerste. Zoeken naar het essentiële van een context.
Contexten kunnen hier zijn: situaties, problemen, procedures, schema's, algoritmen, structuren, formuleringen en axiomatische systemen. Hij merkt op dat er steeds ook naar andere mogelijke contexten gekeken moet worden om analogieën te ontdekken.
Ten tweede. Generaliseren. Dit gebeurt soms onbewust via één enkel paradigma.
Ten derde. Voortschrijdend organiseren, schematiseren en structureren en voortschrijdend formaliseren, algoritmiseren en symboliseren.

Het eerste didactische principe dat Freudenthal aanbeveelt is dat van de geleide herontdekking (*guided re-invention*). Zijn redenering is niet dat kinderen het hele proces van de ontwikkeling van de wiskunde zoals dat in de geschiedenis heeft plaatsgevonden, moeten doorlopen, maar wel dat zij die ontwikkeling op de een of andere manier moeten ervaren. Daardoor kunnen zij een beter zicht krijgen op wat wiskunde eigenlijk is.
Freudenthal geeft onmiddellijk toe dat hier een schier onmogelijke taak voor de docenten en ontwikkelaars ligt. De grote moeilijkheid zit in het vinden van de juiste balans tussen de vrijheid van het laten ontdekken en de drang tot begeleiden. De vrijheid is al ingeperkt door het voorvoegsel 'her' in 'herontdekking'. De leerling moet iets ontdekken dat nieuw is voor hem zelf, maar bekend vóór de begeleider. Inzake het geleiden stelt Freudenthal zich op achter Treffers. Het uitgangspunt moet een context zijn, die aansluit bij de leersituatie van de leerling en die geschikt is voor mathematisering.

Het onderwijs moet sterk interactief zijn, zowel tussen docent en klas, als tussen de leerlingen onderling. De docent moet op de achtergrond kunnen treden zodat de leerlingen tot eigen produkties kunnen komen, waarbij allerlei leer- en onderwijsactiviteiten geïntegreerd worden.

Een belangrijk onderdeel van het wiskundeonderwijs is het tot stand laten komen van **algoritmen**: het vrijwel automatisch laten verlopen van bepaalde technieken. Twee methoden om algoritmen te leren komen veel voor: oefen eerst en begrijp dan, of andersom. Tegenover deze twee stelt Freudenthal de methode van het herontdekken, waarbij oefenen en begrijpen gelijk op gaan, doordat de leerling zelf voortschrijdend schematiseert en verkortingen aanbrengt. De leerling benadert het standaardalgoritme zo dicht als hij goed vindt.
Een voorbeeld hiervan is – naar mijn idee – de leerling die tot en met het eindexamen een drieterm als $x^2 - 7x + 12$ niet ontbindt met de regel: het zoeken van twee getallen waarvan het produkt 12 is en de som -7, maar blijft werken met een vermenigvuldigtabel (zie figuur 1).

·	x		...
x	x^2		...
		$-7x$	
...	...		$+12$

·	x	-3
x	x^2	$-3x$
-4	$-4x$	$+12$

Figuur 1

Freudenthal vindt dat mathematiseren moet uitgaan van **reële zaken**, die nog niet klaar zijn voor een wiskundige behandeling. Die reële zaken moeten dan wel tot de werkelijkheid van de leerling horen.
Freudenthal toont overduidelijk aan dat bijvoorbeeld in schoolboeken veel zogenaamd reële zaken aan de leerling opgedrongen worden als werkelijkheid, terwijl het in feite om heel gekunstelde zaken gaat, die de leerlingen voor zoete koek moeten slikken, maar die geen enkele uitdaging bevatten. Wellicht zijn zulke gekunstelde situaties er verantwoordelijk voor dat sommigen een hekel krijgen aan wiskunde. Freudenthal pleit voor rijke contexten, waarin een leerling zich goed kan inleven, en die tot veel mentale activiteiten aanleiding geven.

In het laatste hoofdstuk gaat Freudenthal in op de vraag of de door hem ontvouwde visie als een **theorie voor wiskundeonderwijs** zou kunnen gelden. Je zou dan ook de juistheid van die visie moeten bewijzen. Maar je komt niet veel verder dan een vaststelling als de volgende: in het basisonderwijs zijn er steeds meer scholen die van een traditionele mechanistische rekenmethode overstappen op een realistische methode. Op zich is dit geen bewijs. Hij erkent dat het uiteindelijk een kwestie van 'geloof' is, waarbij een zekere mate van tolerantie van de kant van de 'ongelovigen' hoort. Verder merkt hij op dat alle dingen die hij heeft opgeschreven over gezond verstand, mathematiseren, de structuur van de wiskunde, contexten, paradigma's, geleide herontdekking, enzovoort, afzonderlijk wellicht als (kleine) theorieën zijn te beschouwen, maar dat dat zeker niet betekent dat er nu een theorie van het wiskundeonderwijs ligt. Hij beschouwt zijn werk als theorievorming over het wiskundeonderwijs, waarin hoogstens contouren zichtbaar worden.
Om tot een betere theorie te komen is **onderzoek** nodig. Freudenthal geeft de voorkeur aan wat hij ontwikkelingsonderzoek noemt. Daarbij wordt leerlingenmateriaal gemaakt, uitgeprobeerd in de klas, verbeterd op grond van de opgedane ervaringen, en opnieuw uitgeprobeerd. Dit proces zou cyclisch herhaald moeten worden. Uiteindelijk moet uitzaaiing plaats vinden naar betrokken schoolboekauteurs en naar de docenten. Zij kunnen vooral hun voordeel doen met de rapportages over de bij leerlingen waargenomen processen, en de reflecties daarop.
In het laatste deel, over de **praktijk van het wiskundeonderwijs**, bespreekt Freudenthal de verschillende personen die optreden in het veld van het wiskundeonderwijs: de ontwikkelaars, de onderzoekers, de docenten, de schoolboekauteurs, de lerarenopleiders. Op met name de rol van de lerarenopleiders gaat hij uitvoerig in. Alle groepen moeten ervoor zorgen dat bij de leerlingen de gewenste onderwijs- en leerprocessen op gang gebracht worden.

Waardering

Ik begin met een paar negatieve opmerkingen. Het boek is behoorlijk aan de prijs. Op zich is dat niet erg, als er veel tegenover staat. Daarover wil ik het volgende zeggen. Het is niet altijd even toegankelijk geschreven. Het taalgebruik is heel persoonlijk, een eigen soort Freudenthal-Engels, maar daardoor soms wat moeilijk te volgen. Ook de toon heeft mij niet altijd evenzeer uitgenodigd tot lezen. Er klinkt een heel klein beetje de klacht in door van de wijze oude man die het allemaal al eens gezegd heeft, en tot zijn leedwezen of ongenoegen moet constateren dat nog steeds niet ieder het doet zoals hij vindt dat het zou moeten gebeuren. Dit moge blijken uit het feit dat hij veel aandacht besteedt aan fouten bij anderen, welke fouten hij vervolgens genadeloos aan de kaak stelt.
In het algemeen geldt zeker dat het boek moeilijk te volgen zal zijn voor iemand die nog nooit iets van Freudenthals ideeën heeft gehoord of gelezen. Voor iemand die al min of meer vertrouwd is met zijn gedachtengoed geeft dit boek een voortreffelijke samenvatting van wat hij over wiskundeonderwijs gedacht, gezegd en geschreven heeft.

Het belangrijkste bij zo'n boek lijkt mij of de lezer zich in behoorlijke mate kan herkennen in de wijze waarop er over wiskundeonderwijs geschreven is. Dat men het op alle punten volledig met de auteur eens zal zijn, zal niemand verwachten.
Een overweging hierbij is de volgende. De manier waarop de laatste jaren leerplannen wiskunde in Nederland veranderen, geeft aan dat velen het belang van Freudenthals ideeën hebben ingezien. Met een beetje overdrijving kun je stellen dat de beleidsmakers inzake het Nederlandse wiskundeonderwijs van Freudenthals gelijk overtuigd zijn. Of dit ook voor de doorsnee docent geldt vind ik moeilijk te beoordelen.

Laat ik besluiten met het uitspreken van mijn waardering voor wat Freudenthal in dit boek bij elkaar heeft geplaatst. Vaak zie je dat grote wiskundigen, en Freudenthal was ontegenzeggelijk één van de grootste wiskundigen die ooit in Nederland hebben gewerkt, zich totaal niet bemoeien met het primair en secundair onderwijs in hun vakgebied. Freudenthal heeft zich, zeker vanaf de tweede wereldoorlog, heel nadrukkelijk met het wiskundeonderwijs in Nederland bezig gehouden. Dit boek geeft zeker veel meer dan een eerste aanzet om te komen tot een vakgebied 'didactiek van de wiskunde' of tot 'de theorie en praktijk van het wiskundeonderwijs'. Het geeft de visie van een groot wiskundige op het wiskundeonderwijs.

Noot

1. Steeds is wiskunde en wiskundeonderwijs geschreven, ook waar rekenen/wiskunde en reken/wiskundeonderwijs beter zou zijn geweest.

Hans Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education*, China Lectures, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991, xi + 200 blzn, *f* 125,–,
ISBN 0-7923-1299-6

● 40 jaar geleden ● ●

▶ Vraagstukken

782. Gegeven de vergelijking:
$x^3 - (2a + 4)x^2 + (a^2 + 6a + 4)x - 2a^2 - 4a = 0.$
a. Voor welke waarde(n) van a heeft deze vergelijking twee gelijke wortels?
b. Voor welke waarde van a is de som van de kwadraten van de wortels van deze vergelijking zo klein mogelijk?
c. Substitueer de laatst gevonden waarde voor a in $y = x^3 - (2a + 4)x^2 + (a^2 + 6a + 4)x - 2a^2 - 4a$ en bepaal daarna, zonder gebruik te maken van afgeleiden, de maximum- en de minimumwaarde van y.

792. Gegeven: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = 4\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}(\gamma + \alpha) = 15\sqrt{3}$.
Gevraagd: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ en $\operatorname{tg}\gamma$, zonder gebruik te maken van tafels.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 40 (1952-1953).

● Werkblad ●

▶ Randen en symmetrie (1)

Randen kunnen van allerlei materiaal gemaakt zijn. Van tegels of mozaïek, geschilderd op een muur of gemaakt van stof, hout of metaal. Op de volgende bladzijde staat een aantal randen uit andere landen en andere tijden.

1. Welke randen hebben verticale symmetrie-assen?

2. Welke randen hebben alleen een horizontale symmetrie-as?

3. Hoeveel randen hebben een horizontale symmetrie-as èn verticale symmetrie-assen?

Randen die hetzelfde blijven als je ze een halve slag draait, noemen we draaisymmetrisch.
Een bekend voorbeeld van een draaisymmetrische rand is de Griekse meander, die op de volgende bladzijde als rand d is afgebeeld.



meander

4. a. Ga na dat de meander (rand d) na een halve slag draaien inderdaad op zichzelf past. Je kunt het met overtrekpapier doen.
   b. Heeft de meander ook symmetrie-assen?

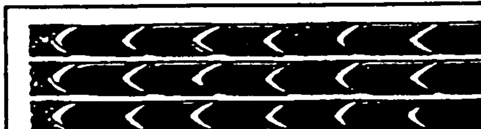
5. Welke van de overige zeven randen zijn draaisymmetrisch?

Uit: 'Regelmaat en Symmetrie', een leerstofpakketje van het team W12-16 voor klas 2.

• Werkblad •

▶ Randen en symmetrie (2)

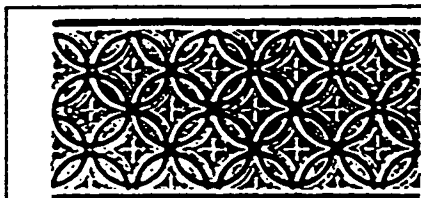
a. Egyptisch



b. Romeins (Pompeï)



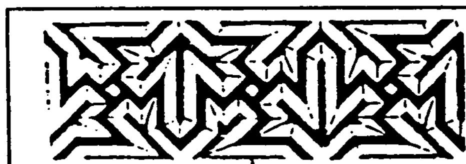
c. Byzantijns



d. Grieks



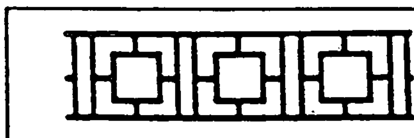
e. Arabisch



f. Moors



g. Chinees



h. Indiaas



Uit: 'Regelmaat en Symmetrie', een leerstofpakketje van het team W12-16 voor klas 2.

▶ Wiskunde in het meao (I)

C. J. Jol

Hoewel het aantal leden van de vereniging dat werkt bij het Middelbaar Beroepsonderwijs niet groot is, kan het toch nuttig zijn voor iedereen om kennis te nemen van hetgeen bij de herstructurering van het mbo aan de orde komt. Al vaker is het beroepsonderwijs een proeftuin geweest voor iets dat later in breder verband moest worden toegepast (bijv. formatie-budget-systeem, lump sum-financiering), bovendien: goed wiskundeonderwijs, waar dan ook, heeft toch ons aller aandacht?
Wat houden de zegeningen van de huidige herstructurering in voor wat straks een economische sectorschool gaat heten? Het onderwijs wordt modulair, vakoverschrijdend georganiseerd. Men zal alleen modules die niet zijn behaald moeten overdoen. Op zich is dat een efficiënte manier van werken waar alleen de roostermaker met 2 of 4 lesroosters per jaar zich zorgen over zou behoeven te maken, totdat we de consequenties zien in verband met het aantal lerarenlessen dat nodig is voor het overdoen van een module in het volgende semester.
Hier zijn echter de consequenties voor het vak wiskunde belangrijk.

Korte schets huidige situatie

De herkomst van de leerlingen is zeer gevarieerd. Het programma biedt daarom de nodige herhaal- en inhaalelementen. Belangrijk voor de keuze van de stof zijn economische toepassing en mogelijkheden tot doorstroming naar hbo.

Het huidige programma omvat in het kort:
1e jaar 1 lesuur per week: herhaling eerstegraads vergelijkingen, functies, ongelijkheden.
2e jaar 1 lesuur per week: rekenkundige en meetkundige rijen; herhaling tweedegraads vergelijkingen, functies, ongelijkheden.
3e jaar 2 lesuren per week (keuzevak): differentiëren, extremen, buigpunten bij hogeregraads functies; gebroken functies; limieten; exponentiële en logaritmische functies; principe van integreren, annuïteiten, contante waarde, lijfrenten etc.).
Dit programma valt natuurlijk te actualiseren maar biedt een goede ondergrond voor doorstromers naar bijv. het heao.

En nu de vernieuwing*

Met welke verbeteringen krijgt het wiskunde-programma meao volgend jaar te maken?
Voor de *deelbasiscertificaateenheid* (wat een woord! C.J.J.) *algemene economische beroepsvorming* heeft de module RV-1 de naam *rekenvaardigheid* (overigens de enige reken-/wiskundemodule die verplicht is). Ik wil u de letterlijke tekst niet onthouden:

Einddoelen
– De leerling kan zelfstandig berekeningen zoals optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen, inclusief volgorde van bewerking, uitvoeren aan de hand van economische voorbeelden.
– De leerling kan zelfstandig bewerkingen uitvoeren met gewone en decimale breuken aan de hand van economische voorbeelden.

* Noot van de redactie

De eindtermen van het vernieuwde meao zijn door de minister vastgesteld d.d. 21 januari 1992; zie uitleg O en W-regelingen 29 januari 1992. Informatie hierover is te verkrijgen bij het ministerie, afdeling BVE/B, of bij de Vereniging BVE te De Bilt. (BVE = beroepsonderwijs en volwasseneneducatie).

– De leerling kan zelfstandig berekeningen met % en ‰ uitvoeren aan de hand van economische voorbeelden.
– De leerling kan zelfstandig berekeningen maken in verband met enkelvoudige interest.
– De leerling kan zelfstandig machtsverheffen aan de hand van economische voorbeelden.
– De leerling kan zelfstandig eerstegraads vergelijkingen met één onbekende oplossen.
– De leerling kan zelfstandig een grafiek van een eerstegraads functie maken aan de hand van economische voorbeelden.
Einde citaat.

Waar blijven snijpunten van grafieken, ongelijkheden, lineaire programmering, onderwerpen die voor toepassing belangrijk zijn en hier goed op aansluiten?

Alleen in één uitstroomcertificaat voor één der vele richtingen komen we nog even een fragment wiskunde tegen:

Financiële rekenkunde
– De kandidaat kan meetkundige en rekenkundige rijen herkennen en onderscheiden en hij kan met betrekking tot *rekenkundige rijen*: berekeningen maken van eindige en *oneindige sommen* (cursivering van mijn, C.J.J); interpoleren en extrapoleren; toepassen op voorbeelden uit de verzekerings- en bankpraktijk.
– De kandidaat kan het begrip samengestelde interest beschrijven en berekeningen van eindwaarde en contante waarde toegepast op het verzekerings- en bankbedrijf.
Einde citaat.

Wil men op een school meer aan wiskunde doen, dan dient dat te komen uit de 10% vrije ruimte, waarom dan gevochten moet worden met bijv. de vakken l.o., godsdienst/maatschappijleer, recht. Mogelijk is ook nog een doorstroommodule voor toekomstige heao-studenten (u weet hoe de minister over die zinvolle 'omweg' denkt), maar dat wordt dan een wiskundig dessert zonder hoofdmaaltijd, immers na de eerste 2½ maand is wiskunde 2 jaar niet aan de orde geweest, hoe valt dan in een laatste semester nog iets op te bouwen?

Conclusie

Ondanks kreten als 'Kies exact', 'Een slimme meid ...' wordt het vak wiskunde onder het mom van meer autonomie bij de scholen in feite de das omgedaan. Is dit niet gewoon een simpele bezuiniging? Hoeveel wiskundige kennis van zaken bij de beslissers aanwezig is, is misschien af te leiden uit hun uitvinding van de oneindige som van rekenkundige rijen. Welk schooltype volgt?

▶ Wiskunde in het meao (II)

W. F. Bijleveld

De bijdrage van collega Jol is een waardevolle aanzet tot een discussie over de toekomst van het vak wiskunde in het meao. Waardevol, omdat in de nieuwe structuur van het meao veel aan de scholen zelf wordt overgelaten. Alle reden dus voor discussie en overleg, misschien zelfs voor samenwerking. Omdat de situatie niet overal dezelfde is, volgt hieronder een korte beschrijving van de positie van het vak wiskunde op de Verrijn Stuartschool in Groningen. Daarna volgen enkele opmerkingen over de toekomst.

Huidige situatie

Het merendeel van de leerlingen begint met een mavo-diploma aan de meao-opleiding. In het eerste jaar worden enkele onderdelen van het verplichte gedeelte van het oude mavo-programma voor wiskunde herhaald (rekenen, eerstegraads vergelijkingen). Dit gebeurt meestal in de lessen economie. In het tweede en derde jaar kunnen leerlingen één van de keuzevakken wiskunde, informatica of assurantie in hun pakket opnemen. Het overwegende motief voor het kiezen van wiskunde is een eventuele vervolgstudie in het heao. De inhoud van het keuzevak wiskunde is dan ook in grote lijnen een selectie van die onderdelen van het oude havo-pro-

●

gramma die van belang zijn als basis voor het economisch hbo, aangevuld met enkele economisch getinte onderdelen zoals lineair programmeren en financiële rekenkunde. Met het oog op dit laatste onderwerp komen ook rekenkundige en meetkundige rijen aan bod. Het aantal lesuren voor het keuzevak bedraagt in totaal ± 180.

De nieuwe structuur

Het mbo ondergaat momenteel een operatie die tot doel heeft het onderwijs goedkoper en meer beroepsgericht (praktischer en minder theoretisch) te maken. Bovendien moeten meer leerlingen dan voorheen met een diploma het mbo verlaten. Voor het economisch en administratief onderwijs heeft de minister inmiddels de eindtermen vastgesteld. De verplichte onderdelen wiskunde verdienen samen niet de kwalificatie *vak*. In het basisjaar volgen alle leerlingen o.a. het onderwerp calculatie (rekenen; eerstegraads vergelijkingen). Leerlingen die doorgaan in de commerciële richting doen een klein onderdeel financiële rekenkunde; in de logistieke richting doet men iets aan lineair programmeren. Daarnaast mogen de scholen hun leerlingen in de vorm van keuze-onderdelen een betere doorstroomkwalificatie aanbieden: leerlingen die dat willen, volgen 240 lesuren in vakken die voor hun vervolgstudie van belang zijn, het zogeheten keuzecertificaat.

De verschillen

Als een school er toe overgaat wiskunde aan te bieden als keuze-onderdeel, dan is de enige fundamentele verandering het verdwijnen van het centraal schriftelijk eindexamen. Dit geldt echter voor de hele nieuwe opleiding.

De toekomst

Ook al vindt een minister dat niet prettig, er zullen altijd leerlingen blijven die gaandeweg hun middelbare beroepsopleiding besluiten de studie na het diploma voort te zetten. Wiskunde op havo-niveau is voor die leerlingen onontbeerlijk.
De heer Jol heeft gelijk als hij vaststelt dat het wiskundig gehalte van het verplichte programma erg mager is. Maar de mogelijkheden voor het vak wiskunde als keuze-onderdeel worden door hem toch onderbelicht. Het is bovendien ook niet nodig, en zeker niet wenselijk, om de keuze-onderdelen in het laatste semester van de studie aan te bieden. Op de Verrijn Stuartschool werken we aan een model waarin de keuzevakken worden uitgesmeerd over het tweede en derde leerjaar. Leerlingen die willen doorstromen hebben dan een iets zwaarder programma dan leerlingen die na het diploma aan het werk willen.
Met de heer Jol ben ik van mening dat het huidige meao-programma voor wiskunde een goed uitgangspunt biedt voor vervolgstudies in de economische sector. Het programma moet wel worden opgeschoond en accenten moeten worden verlegd. De vraagstelling, die soms doet denken aan de hbs-examens van 25 jaar geleden, moet meer recht doen aan de economische omgeving waarin de leerlingen werken.
Misschien is het zinnig om de discussie over de invulling van een nieuw wiskunde-programma voort te zetten op een (regionaal) overleg van wiskunde-docenten. Collega's die samen met mij gestalte willen geven aan een nieuw programma nodig ik uit contact met mij op te nemen.

▶ Wiskunde in het meao (III)

C. J. Jol

De aangeboden nieuwe structuur voor het onderwijs gaat uit van een verdeling van de stof per semester en van certificaateenheden. Gezien de rangschikking is een plaatsing van keuze-eenheden aan het einde van de opleiding organisatorisch voor de hand liggend. Dat de school van de heer Bijleveld continuïteit wil vastleggen voor de wiskunde is verheugend. Overigens op de school waar ik zelf

werk heeft de directie inmiddels de bezwaren van de sectie wiskunde gehonoreerd met meer continuïteit en wat meer uren voor de meeste richtingen. Deze uren worden gehaald uit de vrije ruimte. Maar dit is geen garantie dat dit elders ook zal gebeuren. Een alerte instelling van de sectie kan kennelijk nog wel iets opleveren.
Een toelichting op de achtergronden van het minder dan minimale verplichte programma vind ik niet in het commentaar van de heer Bijleveld, tenzij het woord *goedkoper* de verklaring is, en dat zou me niet verbazen. Dan wordt ook in dit geval een bezuiniging met veel pedagogisch-didactische vernieuwings-bla-bla verhuld.
De toelichting *betere toespitsing op een beroepsprofiel* die ik elders hoorde vind ik dubieus. Functie-inhouden veranderen met grote frequentie. Opleiding voor een vrij smal beroepsprofiel betekent weinig flexibele plaatsbaarheid voor de betrokken afgestudeerden. Een brede opleiding met daarin o.a. een goede wiskundige basis maakt flexibiliteit mogelijk zowel in vervolgopleiding als in de beroepspraktijk. Het feit dat ook de schriftelijke beheersing van vreemde talen dreigt te sneuvelen is mijns inziens eveneens een teken aan de wand voor verschraling van het niveau, welke verbeteringen in de opleiding of organisatie daar misschien ook tegenover komen te staan.

Mededeling

NICL-Overzichten Voortgezet Onderwijs 1993

Dit jaar voor het eerst met een extra katern basisvorming.

Het Nationaal InformatieCentrum Leermiddelen (NICL) geeft jaarlijks leermiddelenoverzichten uit voor de verschillende vakgebieden in het voortgezet onderwijs. Voor het eerst is er dit jaar in de AVO-overzichten een apart katern voor de basisvorming opgenomen. Hierin is een aantal op dit moment beschikbare leergangen t.b.v. de basisvorming beschreven aan de hand van een aan de kerndoelen aangepast analysemodel.
Het is mogelijk, tegen een gereduceerde prijs, combinaties van vakoverzichten te bestellen. U kunt zich op de overzichten abonneren. Naast een abonnement is het ook mogelijk om een of meerdere NICL-gidsen éénmalig te bestellen. In dat geval berekent het NICL een meerprijs van *f* 3,–.
Wiskunde/rekenen/informatica *f* 18,75

Het **'Overzicht Educatieve Software'** biedt informatie over alle Nederlandstalige educatieve software die op dit moment in de handel is. De programma's zijn gerangschikt naar schooltype (BAO/VO) en naar vak. Alle computertypen zijn opgenomen, het merendeel is MS-DOS. Van elk programma zijn de uitgever, doelgroep, prijs, hardware-eisen en eventueel bijbehorende leerboeken vermeld. Het titelregister dat in de uitgave is opgenomen biedt een extra zoekmogelijkheid. Ook bevat deze publikatie een complete lijst met alle adressen en telefoonnummers van de betrokken uitgevers. U kunt zich op deze uitgave abonneren.

Deze publikaties zijn te bestellen bij het NICL op telefoonnummer (053) 840 246.

Boekbespreking

Jan Roels e.a.: *Wiskunde vanuit toepassingen*, Acco Leuven, 220 blz.

Dit boek, met ondertitel 'Functies en matrices als modellen' is een neerslag van een Belgische nascholingscursus voor leraren in de klassen 4, 5 en 6 van het voortgezet onderwijs. Het laat zien, hoe onderwerpen uit de schoolwiskunde behandeld kunnen worden vanuit toepassingen. Het bevat veel voorbeelden, die vaak in de vorm van een leerlingtekst gegoten zijn. De voorbeelden zijn voorzien van aanwijzingen voor de docent en soms van een wiskundige verantwoording. Het boek bevat de volgende 5 hoofdstukken:
1. Eerste- en tweedegraadsfuncties. Hierin worden o.a. de autokosten van een benzine- en dieselauto vergeleken.
2. Goniometrische functies. Hierin wordt o.a. berekend of het mogelijk is en zo ja hoeveel tijd er is om een boorplatform over de Schelde te transporteren, rekening houdend met getijden, de diepte van de Schelde en obstakels boven het water.
3. Exponentiële en logaritmische functies. Hierin staat o.a. de C_{14}-methode voor ouderdomsbepalingen beschreven.
4. Matrices vanuit toepassingen. Hierin staat o.a. een matrixmodel waarin het inwoneraantal van China in de loop der jaren berekend wordt bij verschillende kinderaantallen per gezin.
5. Wiskunde vanuit toepassingen. Dit is een didactische samenvatting van het geheel.

Een Nederlandse leraar die thuis is in de havo- en vwo-A-wiskunde treft weinig nieuws aan: de benadering vanuit toepassingen is in de Nederlandse schoolwiskunde aardig ingeburgerd (een aantal voorbeelden is ook afkomstig uit Hewet- en Hawexliteratuur). Maar het is een prettig leesbaar boek, waarin veel verschillende onderwerpen (ook variërend in niveau) aan de orde komen. Ik denk dat menig lezer er iets van zijn/haar gading in kan vinden.

Z. E. Warmelink

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Oplossing 642

In 1878 woedde er een rage in Amerika: bijna iedereen bezat een houten doosje met daarin 15 genummerde houten blokjes. Men moest ze er willekeurig in leggen en dan schuivend tot de stand 1 t/m 15 brengen. In 1879 verscheen het eerste wiskundige artikel met daarin het bewijs dat slechts in de helft van de gevallen de '15' puzzel oplosbaar was: er zijn even en oneven standen.
Zo kan men bewijzen dat in onze puzzel FLY TOWN niet verschoven kan worden naar WONT FLY. Dan *moeten* er ergens anders ook nog twee blokjes verwisseld worden. Dit zijn de twee D's in DEAD. We moeten dus blijkbaar oplossen:

D	E	A	d
P	I	G	S
F	L	Y	
T	O	W	N

→

d	E	A	D
P	I	G	S
W	O	N	T
F	L	Y	

Op de kubusdag in december '92 liet Edward Hordern (schrijver van 'Sliding Piece Puzzles', 1986, Oxford University Press) mij een oplossing zien in 47 zetten. Toen de oplossingen van Recreatie 642 binnenkwamen bleek dat men hier ver vandaan zat: *Hessel Pot* (28), Woerden en *Wobien Bronstring-Doyer* (26), Leiden hadden 59 zetten nodig. Daarna volgden 63, 67, 69, . . ., 253 zetten.
Rik van Grol (5), Den Haag programmeerde de computer en vond uiteindelijk 6 oplossingen in 45 (!) zetten:
1. YLIEDPFTOWLGAdSAdDEdASDEdITFPdEAGT-WOFWOLNYTNY
2. YLIEDPFTOWLGAdSAEDdEDITFPdEDASDAGT-WOFWOLNYTNY
3. YGAEDPFLIDEdSADEdDASDAGWOTLFPdEI-WOTLFWOYNTYNT
4. YGAEDPFLIDEdSADEdDASDAGWOTLFPdEI-WOTLFWOTNYNTNY
5. YGAdSAdEDPFLIdEDdEASDAGWOTLFPdEIWOTL-FWOYNTYNT
6. YGAdSAdEDPFLIdEDdEASDAGWOTLFPdEIWOTL-FWOTNYTNY

Met zeer krachtige middelen vond hij binnen 2 uur deze oplossingen. Om u een idee te geven: als de oplossing zo'n 50 zetten zou vergen, dan zou de computer al 1 dag rekentijd nodig hebben.

Ook programmeerde Rik de Nederlandse versie:

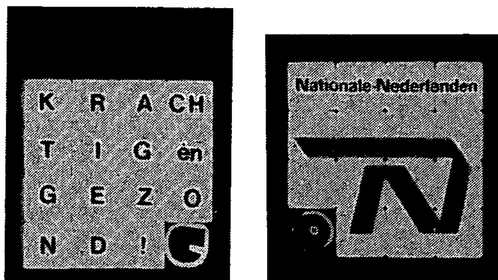
D	E	N	K
O	F	S	C
H	U	I	f
W	T	A	

→

D	E	N	K
O	f	S	C
H	U	I	F
W	A	T	

Hiervoor vond Rik 12 oplossingen in 26 zetten. Onder andere de volgende, ook door Edward Hordern gevonden, oplossing:
AIfCSfITUFfSCITAITFUAITFIT

De theorie van even/oneven stand vindt ook toepassing bij schuifpuzzels als relatiegeschenk:



Zoek in elke puzzel naar twee dezelfde blokjes!

Met 48 punten is winnaar van de boekenbon van *f*25,– geworden de schuifpuzzelverzamelaar

Joop van der Vaart
Van der Mastenstraat 4
2611 NZ Delft

Hartelijk gefeliciteerd.

▶ Opgave 645

Carla, mijn stagiaire in de afgelopen weken, was onlangs op zoek naar een driehoek, waarbij niet alleen de drie zijden maar ook de drie zwaartelijnen een gehele lengte hadden.
Kunt u haar helpen?

Voor een correcte oplossing, binnen 1 maand ingezonden, ontvangt u 5 punten op uw puzzelladder. Na verloop van tijd heeft u het meeste aantal punten van alle deelnemers en ontvangt u een prijs.

▶ Studiecommissie Wiskunde B-programma (vwo)

Naar verluidt is de Studiecommissie Wiskunde B-programma (vwo) ingesteld. Deze commissie heeft een heel brede taakomschrijving meegekregen. Gesteld wordt, dat er problemen zijn rond en met het huidige programma. De commissie wordt gevraagd deze te inventariseren en daarbij te letten op een groot aantal aspecten, zoals:

- omvang, inhoud, toepassingsgerichtheid, diepgang, relatie tussen de onderdelen ruimtemeetkunde en (theoretische) analyse, relatie met informatietechnologie en gebruik van graphic calculator;
- aansluiting op wiskunde 12-16, kerndoelen basisvorming, relatie tot wiskunde A, aansluiting bij havo wiskunde B, voorbereiding op wetenschappelijk onderwijs (daar waar wiskunde wordt gebruikt, niet alleen exacte studies);
- samenhang met andere vakken;
- examens en examenresultaten;
- de aantrekkelijkheid en relevantie van het vak voor verschillende doelgroepen, zoals meisjes, leerlingen voor wie het vak primair algemeen vormend is, leerlingen die opteren voor een exacte studie;
- visies op wiskunde als cultuurelement, op psychologische en filosofische perspectieven, op didactische benaderingswijzen, relatie met wereld- en mensbeeld, het imago van wiskunde B, de relatie met algemene studievaardigheden;
- de rol van de leraar (taak, scholing, nascholing);
- de leermiddelen;
- eventueel gewenst onderzoek;
- eventueel gewenste ondersteuningsactiviteiten.

De commissie neemt mede in beschouwing de actuele beleidsontwikkeling ten aanzien van het vwo. Zij kan betrokken worden in activiteiten in dat kader. (Dit betreft dus de activiteiten van de commissie Ginjaar-Maas, die de tweede fase van het voortgezet onderwijs onder de loep neemt.)
Tenslotte neemt de commissie mede in beschouwing de aanbevelingen van de Verkenningscommissie Wiskunde en de departementale reactie daarop. (Dit betreft dus de wiskunde-opleidingen aan universiteiten. Men zie nog eens de artikelen van Prof. G. Y. Nieuwland over het beroep van wiskundige in Euclides 67, bladzijden 53, 66 en 107.)

De studiecommissie bestaat uit Prof. dr. J. de Lange (Freudenthal instituut; hij is tevens voorzitter van de commissie), Prof. dr. P. L. Cijsouw (T.U. Eindhoven), Prof. dr. A. C. M. van Rooy (K.U. Nijmegen), mevr. drs. A. Breeman (NVvW en Vrouwen en Wiskunde), mevr. drs. A. Verweij (T.U. Delft / wij kennen haar beter als mederedacteur van Euclides), dr. J. A. van Maanen (HMN Utrecht, R.U. Groningen), drs. J. W. Maassen (NVvW); waarnemer namens de inspectie is drs. W. Kleijne.

Het bijzondere van deze commissie is, dat het een studiecommissie is en niet een leerplancommissie. De commissie verricht een breed onderzoek, dat uiteraard wel zou kunnen leiden tot voorstellen om het leerplan in bepaalde zin te wijzigen.
Het ligt voor de hand dat de voorstellen van de commissie betekenis zullen hebben voor het gehele wiskunde-onderwijs. Dat is voor Euclides reden genoeg om de aandacht voor de toekomst van het wiskunde-onderwijs te versterken. Bijdragen hierover zijn welkom!

De redactie.

● Serie ● ● ● ● ●

'Ontwikkelingen in de didactiek'

▶ Waardering voor de eigen aanpak van de leerlingen (I)*

Bram Lagerwerf

Het is altijd al zo geweest dat leerlingen er eigen maniertjes op na hielden, naast de standaardmethode die de docent voorschreef. Die eigen maniertjes krijgen onder het nieuwe programma meer aandacht, is de bedoeling, en de standaardmethode verschuift wat naar de achtergrond. Voor de leraren is het de kunst, de leerlingen te helpen maniertjes te vinden waarmee ze goed uit de voeten kunnen. Inzichtelijke maniertjes, geen trucjes. Daarvoor moeten leerlingen worden aangemoedigd zelf oplossingen te bedenken. Van de leraar vraagt dat belangstelling voor waar de leerlingen mee komen, en de kunst dat zo te helpen ontwikkelen, dat er voor de leerling iets uit ontstaat van blijvende waarde.
Voor de persoonlijke ontwikkeling van de leerling is het bijzonder belangrijk dat het vertrouwen in eigen kunnen op wiskundig gebied wordt ontwikkeld.

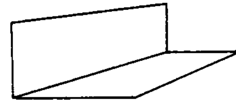
1. Een voorbeeld, de straat[1]

Aan het einde van een lessenserie over de stelling van Pythagoras kregen de leerlingen het volgende probleem op te lossen:

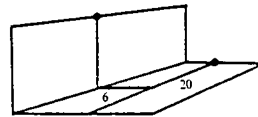
– Iemand staat op het dak van een acht etages hoge flat. Beneden kijkt hij op een 6 m brede straat. Aan de overzijde ervan, recht tegenover hem, staat een man. Deze loopt 20 m opzij. Hoever zou hij nu van de man op het dak vandaan kunnen zijn?

Afgezien van de verschillende manieren waarop de hoogte van de flat werd ingeschat, zagen we de volgende handelingen.

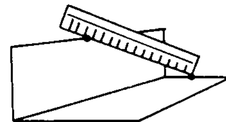
a. In een groep vouwt een leerling een blaadje papier.



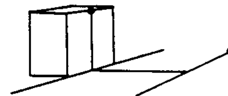
Tekent daarop enkele lijnen en bepaalt de schaal: 1 m is 1 cm.



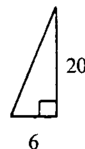
Vervolgens meet hij de afstand tussen de twee punten.



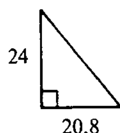
b. Een groep besluit eerst de situatie eens te schetsen.



Tekent vervolgens

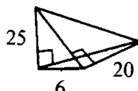


en meet de schuine zijde: 20,8
En daarna



waarna de oplossing opgemeten werd.

c. Een leerling in een groep tekent, na enige discussie in de groep, voor zichzelf het volgende plaatje



waarna zij na twee keer de stelling van Pythagoras toepassen de groep meedeelt: 32½ m!

In dit voorbeeld is te zien hoe leerlingen voor dezelfde opgave een verschillende aanpak kiezen; dat roept vragen op. Dat de schattingen van de flathoogte verschillen laten zien is nog tot daar aan toe, maar waarom komen de leerlingen in a. en b. er niet toe om Pythagoras toe te passen; daar was de opgave toch voor bedoeld? Hoe moeten de oplossingen in a. en b. worden gewaardeerd? Wat is de zin van dergelijke open opdrachten?
Op twee fronten worden verschillen duidelijk:
– leerlingen gebruiken verschillende al eerder geleerde vaardigheden,
– leerlingen zijn allemaal op weg naar het zich eigen maken van de stelling van Pythagoras, maar ze zijn op die weg niet even ver gevorderd.

2. Al eerder geleerde vaardigheden toepassen

Toepassen oefenen
De leerlingen moeten *toepassen* kunnen oefenen. Daarvoor zijn opdrachten nodig die de leerlingen aanspreken, die beelden bij hen oproepen die ze kunnen gebruiken voor de oplossing van het probleem waar het over gaat. Ze moeten zelf kunnen kiezen welke vaardigheden ze zullen toepassen, en bijvoorbeeld ook de nauwkeurigheid die ze nodig vinden. Dat geeft problemen die op verschillende manieren kunnen worden opgelost. Wanneer u, of het boek, steeds overduidelijk aangeeft welke vaardigheden dienen te worden toegepast, leren ze niet zelf te kiezen.
De leerlingen hebben hiervoor een onderzoekende houding nodig, dat is al eerder in deze serie beschreven.
De keuzevrijheid opent de mogelijkheid dat de leerlingen anders kiezen dan u het zelf zou doen. Dat vraagt van u een accepterende houding, geen repressieve tolerantie maar echt belangstelling voor waar de leerlingen mee komen en daar in het vervolg op de een of andere manier rekening mee houden.
De vrijheid voor de leerling moet natuurlijk ook weer niet oeverloos zijn, de opgaven moeten voldoende op het leerdoel zijn gericht.

Vertrouwen in wat je leert
Het kan niet genoeg benadrukt worden hoe belangrijk het is dat de leerlingen vertrouwen ontwikkelen in wat zij leren. Ze moeten de mogelijkheid hebben eerder gevonden oplossingsmethoden vaak genoeg op eigen initiatief toe te passen. *Zien dat het werkt* geeft voldoening, het bevestigt de waarde van de gevonden methode. Daardoor maken ze zich het geleerde eigen. Een meewarige blik of opmerking van de docent doet daar echter weer afbreuk aan. Natuurlijk is niet alles goed wat een leerling doet. Het is voor de docent de kunst om te benadrukken wat goed is en om voor het overige hulp te bieden bij het verder leren. Niet teveel tegelijk; u hoeft niet alles wat nog niet optimaal is tegelijk aan de orde te stellen.

Laten we in dit licht nog eens naar *De straat* kijken. De opgave vraagt duidelijk geen grote nauwkeurigheid. De hoogte van de flat is niet precies gegeven; de plaats van de man aan de overkant is onduidelijk, drukt die zich tegen de gevel van de tegenoverliggende huizen? Ook zal de waarnemer op het dak wel niet op het randje van het dak balanceren.
De aanpak c. zou vroeger de favoriete aanpak van de meeste docenten geweest zijn, nu is er alle aanleiding de aanpakken a. en b. evengoed te waarderen. De leerlingen kunnen over en weer iets van elkaar leren.

Natuurlijk wil de docent dat ook de leerlingen a. en b. Pythagoras leren toepassen in zulke situaties. Daarvoor zullen opdrachten moeten komen die die toepassing nodig maken. Wellicht krijgt leerling c. een opdracht waarin een 'maquette' onvermijdelijk is.

* Deel II van dit artikel komt in het volgende nummer.

1. Overgenomen uit: Kerkhofs, W. e.a., Met het oog op ..., SLO, Enschede 1985.

Vreemde woorden in de wiskunde

Rationaal (< Lat. *rationalis*; < *ratio* = reden; vert. van Gr. ῥητός = uitspreekbaar). In de Gr. wiskunde heette een grootheid oorspronkelijk ῥητός ten opzichte van een andere, wanneer zij zich daartoe verhield als een getal tot een getal. Euclides (ca. 300 voor Chr.) breidt de betekenis weliswaar uit tot het geval van twee lijnstukken, waarvan de vierkanten zich zo verhouden, maar de Lat. vertaling *rationalis* geeft op den duur toch weer alleen de oorspronkelijke betekenis aan, waarvan de term rationaal getal voor een getal van den vorm p/q (p en q geheel, $q \neq 0$) is afgeleid. → *irrationaal.*

Rationeel (< Fr. *rationnel*; < Lat. *rationalis* → *rationaal*). Heeft taalkundig evenveel bestaansrecht als het onder Duitsen invloed ingeburgerde rationaal; het is echter minder aan te bevelen wegens de betekenis redelijk, die het in de omgangstaal bezit.

Simplex (Lat. adj. *simplex* = enkelvoudig). Het n-dimensionale analogon van den driehoek in het platte vlak en van het viervlak in de driedimensionale ruimte. De naam is ingevoerd door P. H. Schoute (1846-1913). Mv. simplexen.

Sinus (Lat.; = plooi, bocht, boezem). In de Indische wiskunde heette de helft van de koorde van het dubbele van een cirkelboog de *ardhâ-jyâ*(*ardha* = *half; jyâ* = koorde) van dien boog. Dit werd, afgekort tot *jyâ* of *jîv*, door de Arabieren als ***ǧîb*** geschreven en wegens overeenstemming in de alleen neergeschreven consonanten geïdentificeerd met Arab. ***ǧaib*** = plooi of opening van een kledingstuk; fig. boezem. Dit werd daarna in het Lat. lett. vertaald als *sinus*. Deze vertaling komt het eerst voor bij Gerard van Cremona (1114-1187). Mv. sinussen.

Dijksterhuis en Van der Wielen, 1948.

Rekenen anno 2002

Victor Schmidt

Inleiding

'De Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs nodigt u hierbij gaarne uit tot het bijwonen van het symposium 'Rekenen anno 2002' over de kwalitatieve ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs in Nederland. Dit symposium vindt plaats op donderdagmiddag 5 november 1992 in de Rotondezaal van het congrescentrum De Leeuwenhorst in Noordwijkerhout.'

Zo nodigde de NVORWO (uit te spreken als NV - ORWO) in een smaakvol opgemaakte aankondiging belangstellenden uit voor genoemd symposium ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van de NVORWO. Het symposium maakte deel uit van het driedaagse Panamacongres, dat elk najaar plaats vindt.

Ter gelegenheid van haar verjaardag had de NVORWO vier illustere sprekers bereid gevonden een voordracht te houden over de ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs in verleden en toekomst. Drie inleiders voerden de titel van professor, de vierde spreker zou de staatssecretaris van O & W zelf zijn. Laatstgenoemde moest echter de onderwijsbegroting 1993 in de Kamer verdedigen, zodat zijn plaats werd ingenomen door een van zijn topambtenaren. Bezoekers aan de symposiummiddag werden persoonlijk welkom geheten door

voorzitter en secretaris van de NVORWO, de heren Wijdeveld en De Moor, en voorzien van een bundel informatiemateriaal, niet alleen het symposium betreffend, maar ook de NVORWO, haar activiteiten en haar publikaties. De Rotondezaal van het congrescentrum, voorheen een kerkzaal, liep goed vol, voornamelijk met conferentiegangers; live-muziek veraangenaamde het wachten.

Wijdeveld leidde het thema van de middag in door de ontwikkeling van het realistische reken- en wiskundeonderwijs kort uiteen te zetten. Hij onderstreepte de rol die instituten als het IOWO, de SLO en het Freudenthal Instituut bij deze ontwikkeling hebben gespeeld. Zo ligt er nu een *'Proeve voor een nationaal programma voor het reken-/wiskundeonderwijs voor de basisschool'*, een geheel vernieuwd leerplan voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs, en is er een leerplan voor de Pabo's in de maak. Wijdeveld en zijn vereniging vragen zich af in hoeverre de visie op het onderwijs, zoals in bovenstaande documenten verwoord, zal gaan sporen met de praktijk van het onderwijs over tien jaar. Deze vraag vormde de rode draad van het symposium. De drie hooggeleerde sprekers, Treffers, Goffree en De Lange zouden in hun bijdrage elk stil staan bij de ontwikkelingen in respectievelijk het basisonderwijs, de Pabo's en de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

De stille revolutie

Eerst hield de vervanger van Wallage, de heer Henkens, een voordracht met als titel 'De Stille Revolutie'. Hij doelde hier op de pedagogische revolutie die zich in alle stilte onder Freudenthal had voltrokken. Het is nogal wat: 80% van alle basisscholen gebruikt tegenwoordig een realistische rekenmethode. Leerlingen krijgen bij gebruik van een dergelijke methode het beeld dat het rekenen ergens over gaat. Daarnaast worden leerlingen gestimuleerd tot samenwerken met anderen. Beide constateringen onderstrepen het belang van realistisch rekenonderwijs. Aan docenten stelt het werken met zo'n lesmethode echter hoge eisen. Nascholing en begeleiding zijn en blijven noodzakelijk.

Heeft het reken- en wiskundeonderwijs nu de hoogste graad van perfectie bereikt? Henkens vond van niet; er blijft een aantal zaken te verbeteren, zoals het feit dat de splitsing van de bovenbouw-wiskunde op havo en vwo in wiskunde A en B niet het emancipatorisch effect heeft dat ervan was verwacht. Meisjes blijken in meerderheid wiskunde A en jongens wiskunde B te kiezen. Daarnaast vond Henkens dat de relatie tussen wiskunde en andere schoolvakken geoptimaliseerd kan en moet worden; hij doelde niet alleen op de relatie met natuurkunde, maar juist op die met bijvoorbeeld economie en aardrijkskunde. De beoogde integratie van speciaal onderwijs met regulier basisonderwijs levert moeilijkheden op; in het speciaal onderwijs wordt traditioneel rekenonderwijs gegeven, dat niet goed strookt met zijn realistische pendant. Tenslotte stelde spreker vast dat het gebruik van de microcomputer in het reken- en wiskundeonderwijs nog geen hoge vlucht heeft genomen. Hij achtte organisatorische problemen op de scholen verantwoordelijk voor het tegenvallend computergebruik. Van de graphic calculator heeft Henkens hogere verwachtingen.

Adri Treffers

Adri Treffers' voordracht was getiteld *'Terug naar de toekomst'*. Treffers – hoogleraar aan het Freudenthal Instituut – onderscheidde drie perioden in de ontwikkeling van realistisch rekenonderwijs: de horizontale periode in de zeventiger jaren, de verticale periode van de tachtiger jaren en de diagonale periode, die het komend decennium zijn beslag moet vinden. Elk van de drie perioden heeft zijn sporen nagelaten of zou dat nog moeten doen, op het terrein van ontwikkeling en onderzoek, in de leerboeken en bij de feitelijke onderwijspraktijk.

In de zeventiger jaren stond **horizontaal mathematiseren** (het herkennen en toepassen van wiskunde in probleemstellingen buiten de wiskunde) in de belangstelling. Ideeën op dit gebied waren met name afkomstig van het toen nog bestaande IOWO in de vorm van het Wiskobas-project. Treffers gaf een (recent) voorbeeld van een polemiek in de Volkskrant tussen twee politicologen van naam, waarin

de ernst van rassentegenstellingen in de USA aan de hand van cijfers beoordeeld werd. Duidelijk werd dat met het gegeven cijfermateriaal elke mening onderbouwd kan worden. Zo zoeken optimisten naar 'mooie' verhoudingen en pessimisten naar 'lelijke' verschillen.

In de horizontale periode bleef het **verticaal mathematiseren** (het gebruik van realistische contexten om wiskunde aan te leren) achterwege. Dat was een ernstig gemis, dat in de tachtiger jaren werd rechtgezet. Treffers gaf een voorbeeld over hoe het rekenen met breuken en staartdelingen geleerd kunnen worden aan de hand van een context, zoals een reep chocola of een verdelingsprobleem. Bij elke stap in het leerproces is het mogelijk terug te koppelen naar de context. Zo evolueert het proces van informeel naar formeel, en zo gaan de activiteiten van de leerling van tekenen en tellen via schatten naar exact berekenen. Zo'n modelcontext kan de leerling behulpzaam zijn op het moment dat hij een kale berekening moet uitvoeren, maar ook als hij de berekeningswijze moet toepassen bij andere contexten.

De ideeën uit de horizontale en de verticale periode zijn goed doorgedrongen op het terrein van ontwikkeling en onderzoek. Onderzoekers staan nu voor de uitdaging het goede uit beide tijdvakken te combineren tot wat Treffers de diagonale periode noemde. Anders is het gesteld met leerboekauteurs. Hoewel het realistische rekenonderwijs in de diverse lesmethoden terug te vinden is, lijken de verworvenheden uit de verticale periode nog geen gemeengoed te zijn onder de auteurs. De realisering in de lespraktijk van bovenstaande ideeën baart Treffers grote zorg. De onderwijspraktijk kent andere wetmatigheden dan de wereld van de onderzoekers. Zo kunnen de ouders – die in het onderwijs één van de succesfactoren vormen – een verdere ontwikkeling van het realistisch rekenonderwijs in de weg staan.

Treffers sloot af met een somber getint toekomstbeeld. Naast zijn zorg omtrent de ontwikkeling van het realistisch rekenen in de onderwijspraktijk uitte hij ook zijn bezorgdheid over het aflopen van het Panamaproject. Door stopzetting van dit project dreigt de benodigde kadervorming weg te vallen. Spreker vond dat de titel van het symposium zou moeten luiden 'Rekenen anno 2002 seconden'.

Fred Goffree

Anders was de toonzetting van de voordracht van Fred Goffree, hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam en verbonden aan de SLO. Goffree belichtte de ontwikkeling van het reken- en later ook rekendidactiekonderwijs aan de Pabo. Hij waagde zich niet aan toekomstvoorspellingen, maar zou liever de toekomst mede vormgeven.

Om een idee te krijgen van de historische ontwikkeling van het rekenonderwijs aan de Pabo liet Goffree een aantal eindexamenopgaven zien. Een mijlpaal in de geschiedenis van de Pabo is het jaar 1952. In dat jaar werd de nieuwe kweekschoolwet van kracht en werd een nieuw examenprogramma rekenen ingevoerd. Voordien bestond het examen rekenen uit een aantal cijfervraagstukken, gevolgd door een aantal opgaven handelsrekenen, toen kennelijk gezien als het toepassingsgebied van de rekenkunde. De rekendidaktiek kwam in het examen niet aan bod. Dat laatste veranderde gaandeweg in de jaren vijftig en zestig. In het examenprogramma van na 1952 was ruimte voor meer op de didactiek georiënteerde toetsonderdelen. Het examen werd mondeling afgenomen. Goffree liet op originele wijze een voorbeeld zien en vooral horen, met behulp van een fictieve kandidaat.

De zestiger en zeventiger jaren met Wiskobas, de verandering van de naam kweekschool in Pa(bo) en de door Treffers genoemde ontwikkelingen hadden nagenoeg geen invloed op het eindexamen rekenen/-didactiek van de Pabo. De boeken van de spreker zelf geven zijn eigen visie op het examen. In een van de delen geeft Goffree een alternatieve examenopzet rond de vraag 'wat voor reken-/wiskundeleraar ben je?' Uitgaande van een aantal basiseigenschappen en vaardigheden, die Goffree bij de kandidaat-leraar aanwezig veronderstelt, zou hij de examinandus activiteiten laten verrichten op het

terrein van die eigenschappen en vaardigheden, om zo een antwoord te krijgen op de bovengestelde vraag. Die activiteiten variëren van het beoordelen van een leerlingenfout tot bijvoorbeeld het ontwerpen van een bijlesplan. Zijn ideeën op dit gebied hebben weinig weerklank gevonden.

Inmiddels zijn we tien jaar verder. De doorbraak van het realistisch rekenonderwijs is een feit. Op de Pabo wordt rekenen en didactiek als een geïntegreerd geheel gezien. Hoe ziet een ideaal eindexamen er nu uit? Goffree zou in de toekomst op de Pabo naast het kernprogramma twee specialisaties willen invoeren: onderbouw (waarin kleuterwiskunde) en bovenbouw (waarin alles tot en met voortgezet rekenen). De bovenbouwspecialisatie zou niet alleen betrekking hebben op het basisonderwijs, maar ook op de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Aanpassing van de naam Pabo in Pabo-bv (van basisvorming) lijkt misschien op een vercommercialisering van de Pabo, maar ligt in de lijn der ontwikkelingen.
Een examen anno 2002 zou moeten bestaan uit een afstudeeropdracht (door Goffree ambachtelijk 'meesterstuk' genoemd), waarin de examinandus blijk geeft van zijn kennis en inzicht op het gebied van de rekendidactiek. In een eindgesprek wordt van de kandidaat reflectie verwacht op zijn meesterstuk in zowel theoretische als praktische zin. Tenslotte is Goffree van mening dat de gecijferdheid van aankomende leraren getoetst moet worden. Nu vindt die toetsing alleen in het eerste jaar van de opleiding plaats.

Jan de Lange

Jan de Lange sprak in de laatste voordracht, die als titel *'Tussen einde en begin'* droeg, over de vernieuwing van het wiskundeprogramma in het kader van basisvorming. Op de hem karakteristieke wijze (cabaretesk, zo noemde de voorzitter het) wist De Lange zijn gehoor een klein uur lang te boeien. Hij ging in op het waarom en het hoe van het nieuwe programma en de te verwachten problemen daarbij. Problemen worden onderkend op het terrein van de doceerbaarheid van het programma. Van docenten wordt een andere stijl van lesgeven verwacht, meer interactief en minder frontaal. De docent wordt manager van het leerproces en moet daarbij met onzekerheden, zowel bij de leerling als bij hemzelf, om kunnen gaan. Niet elke docent zal in staat zijn structuur en doelen in het basisprogramma te herkennen.
Het toetsen in het nieuwe programma is een probleem op zich. Toetsen zou een onderdeel van het leerproces moeten zijn, de leerling de gelegenheid moeten bieden te laten zien wat hij kan en alle niveaus moeten overdekken. Het construeren van praktische en realistische contexten is niet iedereen gegeven. De scoorbaarheid van een toets is niet meer een vanzelfsprekend feit.
Hoe ziet De Lange de toekomst van het wiskundeonderwijs? Hoewel veel projecten op het terrein van computergebruik in de wiskundeles zijn gestruikeld over logistieke problemen en/of slechte software, is de rol van de computer niet uitgespeeld. Naar alle waarschijnlijkheid zullen de grafische zakrekenmachines meer invloed uitoefenen op het wiskundeonderwijs. Ze zijn immers goedkoper en handzamer dan een PC. Tenslotte is de interactieve video op komst. Leerlingen zullen in staat zijn te communiceren met TV-beelden. De Lange liet een voorbeeld zien van de loop van een olifant en een paard, waarbij periodiciteit naar voren komt. Hilariteit ontstond toen spreker het plaatsen van de poten van een olifant op het podium voordeed.
Deze technologieën vinden niet vanzelf een weg naar het onderwijs. Zonder een continue evaluatie van leerplannen en examens, zonder continue ontwikkeling, innovatie en aanpassing en zonder nascholing en verbetering van de arbeidsvoorwaarden van de docent kunnen beschreven ontwikkelingen niet of slechts onvoldoende tot hun recht komen. De knipoog naar de afwezige staatssecretaris was goed zichtbaar.

Tot slot

Een boeiende middag vond haar einde in de afsluitende woorden van Wijdeveld. Hij meende de vraag waarmee hij het symposium opende ontkennend te moeten beantwoorden. Maar *'het baken op de weg naar een kwalitatief hoogwaardig rekenwiskundeonderwijs in Nederland'* was daadwerkelijk gezet.

● Verenigingsnieuws ●



Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

► Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Enquête wiskundelesuren vanaf de invoering van de basisvorming

Algemene opmerkingen

* Aan alle 2031 scholen met één of meer van de afdelingen (i)vbo, mavo, havo of vwo, zoals die in ons bestand van 1991 voorkomen, is een aankondiging gestuurd voor onze regionale bijeenkomsten in maart 1993. Tegelijk hiermee stelden we de vraag naar het aantal lesuren wiskunde dat vanaf de invoering van de basisvorming in de eerste 3 klassen en in 4 en 5 havo gegeven zal worden.

* Van ruim 100 scholen kwam de envelop retour met: 'bestaat niet meer'; er zijn dus al heel wat fusies voltooid!

In verband hiermee is het juiste responspercentage, qua aantal scholen, door ons nu niet te achterhalen; belangrijk is welk deel van de leerlingen een bepaald aantal uren krijgt. We hopen dat onderstaande tabellen van de ontvangen formulieren, afkomstig van grote en kleine scholen, een redelijk beeld geven.

* De respons van het (i)vbo is erg laag; een oorzaak hiervan kan zijn dat deze leraren meer vakken geven, zodat niemand zich speciaal voor wiskunde verantwoordelijk voelt.

* Acht scholengemeenschappen melden lessen van 45 minuten; omdat daar weer extra keuze- of hulpuren tegenover plegen te staan, zijn de aantallen toch gewoon geteld (dus niet verkleind).

* Slechts enkele formulieren vermelden in bepaalde klassen 2½ of 3½ uur, ('combinatie met informatiekunde'). Deze zijn geteld als 3 of 4 uur.

* Sommige scholen 'knokken' nog voor een uur meer; dit is wel meegeteld als er zoiets als 'waarschijnlijk' bij stond, niet bij 'hopelijk'.

Basisvorming

Toelichting bij tabel I van de eerste t/m de derde klas:

* In de eerste klas worden overal 3 of 4 uren gegeven, in de tweede en derde klas 2, 3 of 4 uren. Dit overziende, kozen wij tenslotte voor het verwerken van het totaal aantal uren in de eerste 3 klassen.

* Alleen voor de weinige (i)vbo's en mavo's die bij de enquête een verschil aangaven tussen leerlingen die wel en die geen wiskunde-examen zullen doen, is de rubriek 'geen examen' ingevuld. Het is mogelijk dat een aantal andere scholen ook wiskunde in de derde klas al facultatief stelt, zonder dit te melden.

* Sommige (i)vbo's geven op A/B-niveau minder uren dan op C/D-niveau, meestal is het aantal gelijk. Wel krijgen bij vbo/mavo-combinaties soms de vbo C/D leerlingen voor hetzelfde examen in de eerste 3 jaar een uur minder dan de mavo.

* Scholengemeenschappen melden vaak maar één urental voor alle vbo-niveaus. Niet duidelijk is dan of de A/B stroom b.v. in de 3e klas al wiskunde mag laten vallen. Daarom is in deze gevallen alleen vbo C/D geteld.

* Veel scholengemeenschappen geven aan alle afdelingen evenveel uren in klas 1 t/m 3, maar vaak gebeurt dit ook niet; zeer veel verschillende combinaties komen voor, waarbij men steeds moet bedenken dat een uur meer of minder gecompenseerd kan worden in de vierde klas.

* Hoewel bij mavo's naar verhouding vaker 11 uur voorkomt dan bij alle andere typen scholen, geven toch m/h/v-scholengemeenschappen nogal eens, bij gelijke urenaantallen in de 1e en 2e, in de 3e klas mavo één, in één geval zelfs twee uur minder dan aan de h/v klassen. Dit kan samenhangen met het niet ter keuze willen stellen van wiskunde in 3 mavo.

* Bij andere m/h/v-scholengemeenschappen hebben weer mavo, havo en gymnasium 10 uur en atheneum 11 uur; soms echter heeft havo juist een

TABEL I

Verdeling per schooltype van het totaal aantal wekelijkse wiskunde-uren in de eerste 3 klassen, in aantallen scholen

AANTAL LESUREN	6	7	8	9	10	11	12	totaal
(i)vbo A/B geen examen	2		2					4
al of niet ex.		2	4	12	2			20
(i)vbo C/D geen examen	1	1	2	3				7
al of niet ex.		1	1	13	34	8	1	58
mavo geen examen	1	3	1	9	6	2		22
al of niet examen				7	104	45	3	159
havo				4	117	25	3	149
vwo/atheneum				3	107	32	3	145
gymnasium				7	26	1		34

uur meer dan vwo; één school geeft (dakpanconstructie): m 4-3-4, m/h/v 4-3-3 en h/v 3-3-3.
* Eén school laat, naast de 26 verplichte uren van de basisvorming, de overige 6 uren per kwartaal door de leerlingen kiezen, waarbij per vak nog de keuze is tussen 'vakbegeleiding en vakverdieping'. Maximaal 2 van deze 6 uren kan wiskunde gekozen worden, elk kwartaal weer. Dit is dus echt anders dan bij de scholen met lessen van 45 minuten.

Havo

Voor de havo hebben we het totaal van klas 1 t/m 3 plus klas 4 t/m 5 nagegaan, zie tabel II.
* Hoewel veel scholen voor wiskunde B één of twee (1 school zelfs drie) uur meer geven dan voor A, geven ook veel scholen evenveel uren en is er ook één school waar wiskunde A een uur meer heeft: 'voor zwakke leerlingen is het voor de rest van hun leven belangrijk dat ze toch wiskunde A kunnen volbrengen, B moet je alleen kiezen als je goed bent'.
Er wordt echter alom geklaagd dat er in de maatschappij een tekort aan exact opgeleiden ontstaat, en het enthousiasme voor het kiezen van wiskunde B zal met weinig lessen en daardoor vaak veel en lastig huiswerk, vermoedelijk niet toenemen.
* Speciaal het geringe percentage meisjes dat wiskunde B (vergeleken met de oude wiskunde) op de havo kiest, lijkt zorgen te baren. Helaas zijn precieze cijfers hierover niet bekend, ook niet bij het CBS, maar de inspecteur drs. W. Kleijne beloofde, op

TABEL II

Totaal aantal lesuren wiskunde, in aantallen scholen

aantal lesuren		aantal scholen	
klas 1 t/m 3	klas 4 t/m 5	havo A	havo B
9	8	2	1
9	10		1
10	7	2	
10	8	87	15
10	9	19	36
10	10	4	59
11	8	15	2
11	9	8	8
11	10	1	14
12	8	3	2
11,5	10		1
	totaal	141	139

ons verzoek, zijn best te doen om deze cijfers te verzamelen.
* De scholen die havo B met totaal maximaal 18 uur moeten rooien, hebben wij direct per telefoon hun positie gemeld ...... wie weet valt er voor hen zo nog iets te bereiken voor het nieuwe schooljaar.
* Dat de capaciteiten van de leraar en de schoolsituatie van veel groter belang kunnen zijn dan het totaal aantal uren, blijkt uit het telefonisch antwoord van een leraar uit Zeeland, die met 10 + 8 uur voor havo B, een gemiddelde van bijna 7 wist te scoren op het cse 1992!
* Op de 154 formulieren met havo A worden maar 15 keer faciliteiten gemeld voor het begeleiden bij de overstap van havo A naar vwo A, in de vorm van een taak- of extra les-uur. Eén hiervan meldt voor vwo A 2/3 taakuur vanaf havo A en 1/3 vanaf havo B (kansrekenen); één 'bijwerkleraar' geeft totaal 12 lessen in ruil voor minder surveillancetaken. Een aantal scholen verstrekt voor deze overstap alleen een 'aansluitingskatern', dat bij enkele methoden hoort.
* En aantal scholen heeft wel een onderbouw havo, maar geen bovenbouw. Soms wordt slechts één van de twee wiskundevakken aangeboden.
* Bij scholen voor mbo met een havotop en bij scholen voor volwassenen begint de havo pas bij de vierde klas. Zie tabel III op de volgende bladzijde.

TABEL III

Totaal aantal lesuren wiskunde na een mavodiploma (of gelijkwaardige vooropleiding), in aantallen scholen

schoolsoort	uren	aantal scholen	
		havo A	havo B
havotop bij mbo	8	5	2
	9		1
	10		1
volwassenen			
versneld 1-jarig	5	3	2
2-jarig	5	1	1
versneld 1-jarig	6		1
3-jarig	6	1	
2-jarig	8	4	3
2-jarig	9		1
totaal		14	12

Mededeling

Conferentie 'Informatiekunde in samenhang'

Op 24 en 25 september 1993 zal voor de vierde keer de landelijke conferentie over informatiekunde en informatica in het voortgezet onderwijs worden gehouden, georganiseerd door de Vereniging I & I, de VALO, SLO, PRINT en CPS.
Het programma dat de ± 200 deelnemers in Congrescentrum *'de Blije Werelt'* te Lunteren kunnen volgen ligt nog niet vast op dit moment. Zeker is wel dat in lezingen, presentaties en workshops aan de orde zullen komen:

- *Informatiekunde in de basisvorming*:
  - Stand van zaken op scholen
  - Integratie in andere vakken
  - Afsluiting en toetsing
  - Samenhang van vakken
- *Informatica na de basisvorming*:
  - Het leerplan VO-II
  - Aansluiting op beroepsvoorbereiding
  - Afstemming op universiteit en hogeschool
- *Nieuwe programma's, hardware en toepassingen*
- *Multimedia*
- *Nascholing*

We willen graag zo veel mogelijk op de praktijk gerichte werkgroepen. Daarom vragen we iedereen die een leuke toepassing heeft bedacht, een goed opgebouwd curriculum hanteert of een invoeringsplan I.T. heeft ontwikkeld voor zijn of haar school, zich aan te melden bij een van de volgende personen met een korte beschrijving van een mogelijke werkgroep. De programmacommissie neemt vervolgens contact met u op.
Voor inlichtingen en inschrijfformulieren: Hermien Hesselink, 053-84 04 23 (kantooruren), Henny van de Wetering, 08376-1 49 58 (privé), Paul Jansen, 053-84 06 06 (werk), 08350-2 62 44 (privé), 08350-2 52 91 (fax).

Adressen van auteurs

A. Aukema-Schepel, Buitenplaats 77, 8212 AC Lelystad
H. Broekman, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
W. F. Bijleveld, Verrijn Stuartschool, Postbus 2620, 9704 CP Groningen
W. H. V. de Goede, Rusthoven 4, 9301 TD Roden
C. J. Jol, Eemwijkstraat 35, 2271 RD Voorburg
A. Lagerwerf, Dwarsweg 52, 3702 XC Zeist
V. E. Schmidt, Verlengde Grachtstraat 43, 9717 GE Groningen
G. Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht

Kalender

12 mei 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
15 mei 1993: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen havo A. Zie Euclides 68-7 blz.222.
21 mei 1993: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo A. Zie Euclides 68-7 blz.222.
26 mei 1993: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen lbo/mavo C-D. Zie Euclides 68-7 blz.222.
29 mei 1993: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo B en havo B. Zie Euclides 68-7 blz.222.
9 juni 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
16 juni 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
17 september 1993: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.

Inhoud